ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ШАГ В БУДУЩЕЕ»

Предмет «МАТЕМАТИКА»

МАТЕРИАЛЫ ОЛИМПИАДНЫХ ЗАДАНИЙ

2010 ГОД

Академическое соревнование

ЗАДАНИЯ ПО МАТЕМАТИКЕ

Вариант I.

Задача №1.
Два бегуна одновременно начинают бег из одной точки круговой дорожки и одновременно заканчивают бег в той же точке. Если они бегут в одном направлении, то до окончания бега первый спортсмен 2 раза обгоняет второго спортсмена. Если они бегут в разных направлениях, и каждый делает столько же кругов, что и в первом случае, то они встречаются 10 раз до окончания бега. Сколько кругов делает каждый спортсмен?

Задача №2.
Радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника, равен 5. Найти площадь треугольника, если известно, что его стороны образуют арифметическую прогрессию.

Задача №3.
Докажите неравенство
$$\frac{1}{\sin^{10}\alpha}+\frac{1}{\cos^{10}\alpha}\geq 64$$

Задача №4.
Задано множество парабол $y=x^2+px-15$, где p - действительное число. Через точки пересечения каждой из этих парабол с осями координат проведена окружность. Найти множество всех точек, являющихся центрами таких окружностей.

Задача №5.
Известно, что уравнение $x^3+3x^2+px-8=0$ имеет три действительных корня, два из которых удовлетворяют равенству $(x_1+4)(x_2+4)=8$. Найти третий корень уравнения.

Задача №6.
Функция *f(x)*, определенная для всех действительных значений *x*, удовлетворяет соотношению $f(x^2)-2xf(x+2)-f(x^2+2)=x^2+5x$ при любом значении *x*. Найти *f(3)*.

Задача №7.
Известно, что $\sqrt{a}+\sqrt{b+1}=c-1$ и $2\sqrt{ab+a}=c^2-6c+13$. Найти a и b.

Задача №8.

Найти все значения параметра *a*, при которых уравнение $\sin x = (4a-2)^2$ имеет корни, а числа $\frac{1-4a}{27a^4}$ - целые.

Задача №9.

Решить уравнение

$$\cos^2 x + \left(\cos\frac{1}{x}\right)^2 + \left(\cos\frac{x^2-1}{x}\right)^2 - \left(\cos\frac{x^2+1}{x}\right)^2 = 2\cos x\cos\frac{1}{x}\cos\frac{x^2-1}{x}$$

Задача №10.

Решить в целых числах уравнение

$$3^{2x+1} + 5*3^x + 1 = y^2$$

Вариант II.

Задача №1.

Натуральное число имеет ровно 9 различных натуральных делителей (включая 1 и само число). Известно, что число делится на 6 и не делится на 8. Найти это число.

Задача №2.

На олимпиаду пришло 100 школьников. Оказалось, что один из пришедших знаком со всеми 99-ю участниками олимпиады, второй - с 98-ю, третий - с 97-ю, и т.д. 99-ый школьник знаком только с одним из участников. Сколько знакомых у сотого участника.

Задача №3.

Вычислить сумму корней уравнения $25x^2 + bx - 6 = 0$, если известно, что один из них является также корнем уравнения $\arccos 3x + \arccos 4x = (3\pi)/2$.

Задача №4.

Решить в целых числах уравнение

$$4(4^{2k} + 3*4^{k-1} + 1) = y^2 + 1$$

Задача №5.

Найти максимальное значение выражения $x^3y - y^3x$, если известно, что $x^2 + y^2 = 2$.

Задача №6.

Решить неравенство

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{x^2-2x-3} + \sqrt{3x^2+10x+7} \le 10$$

Задача №7.

Решить уравнение

$$x^{\log_3 x} = \log_3(2+2x-x^2)$$

Задача №8.

В первый день работы приемной комиссии кулинарного техникума на специальность кондитера было подано 6 заявлений, а на все остальные специальности - нечетное число заявлений. В последующие дни на специальность кондитера ежедневно подавалось 6 заявлений, а на все остальные специальности ежедневно подавалось столько заявлений, сколько их было подано на все остальные специальности, в том числе и на спе-циальность кондитера, за все предыдущие дни. В последний день работы приемной комиссии на все специаль-ности, кроме специальности кондитера, было подано 2010 заявлений. Сколько дней работала приемная комиссия? Сколько заявлений было подано в первый день?

Задача №9.

Функция ***f(x)*** определена для всех действительных значений ***x*** . Найти все возможные пары ***(a; b)***, при которых система уравнений

$$\begin{cases} f(x)+2f(1-x)=ax+4 \\ 3f(x)+f(1+x)=2x-b \end{cases}$$

имеет решения. Найти ***f(x)*** при найденных значениях (***a; b***).

Задача №10.

Пусть x, y, z – положительные числа и

$$\frac{x}{1+x^2}+\frac{y}{1+y^2}+\frac{z}{1+z^2}=1$$

Найти максимальное значение выражения

$$\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+y^2}+\frac{1}{1+z^2}$$

Вариант III.

Задача №1.

Два лыжника одновременно стартовали из пункта А в направлении пункта В. Первый лыжник, скорость которого больше, достигнув В, повернул обратно. На расстоянии 1 км от пункта В он встретил второго лыжника. Затем доехав до пункта А первый лыжник снова раз-верн улся и направился в В. Проехав половину пути он вновь встретил второго спортсмена, который возвращался из В. Найдите расстояние между пунктами А и В.

Задача №2.

Решите уравнение $1 + 2|\sin x| = 2\cos 2x$.

Задача №3.

Вычислить объем треугольной пирамиды, у которой два противоположных ребра 4 и 12 см, а каждое из остальных ребер равно 7 см.

Задача №4.

Решите уравнение $2\cdot 5^{2\sqrt{x^2-3}+2x}-49\cdot 5^{\sqrt{x^2-3}+x}-25=0.$

Задача №5.

Решите неравенство $\log_{\frac{1}{3}}(x-5)+\log_3(x+5)>\log_{\frac{x+5}{x-5}}3.$

Задача №6.

В окружности радиуса R проведены два перпендикулярных радиуса OA и OB. Вторая окружность радиуса R имеет центр в точке B. Найти радиус третьей окружности, которая касается OA, первой окружности внутренним образом и второй окружности внешним образом.

Задача №7.

Решите уравнение $\log_2(2+4|\sin x|) = 2 - 3^{|x|}$.

Задача №8.

Найдите все значения параметра p, при которых уравнение

$$25x^5 - 25(p-1)x^3 + 4(p+5)x = 0$$

имеет ровно 5 различных решений, а сами решения, упорядоченные по возрастанию, образуют арифметическую прогрессию.

Задача №9.

Найдите множество значений функции

$$y = \frac{1}{\cos(\frac{\pi}{2}\sin(x^2+x+2)) + \sin(\frac{\pi}{4}\sin(x^2+x+2)) + 2}.$$

Задача №10.

За время хранения вклада в банке проценты по нему прибавлялись к вкладу ежегодно сначала в размере 5% в год, затем $11\frac{1}{9}$ % в год. Известно, что под действием каждой процентной ставки вклад находился целое число лет, а по истечении срока хранения первоначальная сумма вклада увеличилась на $36\frac{1}{9}$ %. Определить срок хранения вклада.

Вариант IV.

Задача №1.

Фермер предполагает продать огурцов на 15% меньше, чем в прошлом году. На сколько процентов ему надо повысить цену на свои огурцы, чтобы получить за них на 2% больше денег, чем в прошлом году?

Задача №2.

Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} xyz + 2x + 2 = 0; \\ xyz - 2y + 4 = 0; \\ 2xy + \dfrac{3}{z} + 3 = 0. \end{cases}$$

В ответе указать сумму всех решений системы.

Задача №3.
Решите уравнение: $3x-2\sqrt{2x+5}\cdot\sqrt{x+2}=\sqrt{2x+5}-\sqrt{x+2}-7$

Задача №4.
Решите уравнение: $log_{0,8(x-x^2+2)}(\sin\pi(x^2+\frac{1}{4}))=0$

Задача №5.
Найти область определения функции:

$$f(x)=\sqrt[6]{4^{\frac{x+1}{x}}-17\cdot 2^{\frac{1}{x}}+4}$$

Задача №6.
Найдите наибольшее значение площади равнобедренного треугольника OAB с основанием OB, если O – начало координат, B – точка на оси Oy, A – точка на графике функции
$y=\dfrac{12}{x}+8x^4e^{5-2x}$, $2.1\le x\le 2.9$.

Задача №7.
В параллелограмме ABCD проведена диагональ AC. Точка O является центром вписанной окружности в треугольник ABC. Расстояния от точки O до вершины C и прямых CD и AC соответственно равны 13; 6; 5. Найдите площадь параллелограмма.

Задача №8.
Вершина конуса и окружность, ограничивающая его основание, находятся на сфере. Длина образующей конуса равна 3 см, а радиус его основания равен 1 см. Найти площадь сферы (в см^2).

Задача №9.
Даны точки A(-6;-6;-8), B(1;2;1), C(0;0;2). Найти сумму координат точки M(x;y;z), если $\overline{AB}+3\overline{BC}=2\overline{BM}$

Задача №10.
При каких значениях параметра *m* уравнение $|3-2x|=m|x+2|+1$ имеет единственный корень?

Вариант V.

Задача №1.
Агрофирма предполагает продать пшеницы на 4% меньше, чем в прошлом году. На сколько процентов ей надо повысить цену за свою пшеницу, чтобы получить за неё на 0,8% больше денег, чем в прошлом году?

Задача №2.
Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} xyz + 2y + 2 = 0; \\ xyz - 2z + 4 = 0; \\ 2yz + \dfrac{3}{x} + 3 = 0. \end{cases}$$

В ответе указать сумму всех решений системы.

Задача №3.

Решите уравнение: $x + 2 - 4\sqrt{\frac{x+2}{x-2}} = \frac{21}{x-2}$

Задача №4.

Решите уравнение: $log_{1,6(3x-2x^2)}(\cos\pi(4x - 4x^2 - 0{,}75)) = 0$

Задача №5.

Решить уравнение:

$$2{,}5^{\frac{4+\sqrt{9-x}}{\sqrt{9-x}}} \cdot 0{,}4^{1-\sqrt{9-x}} = 5^{10} \cdot 0{,}1^{5}$$

Задача №6.

Какие размеры нужно придать радиусу основания и высоте цилиндрического бака, чтобы при заданном объёме V на его изготовление пошло бы наименьшее количество листового металла?

Задача №7.

Окружность, вписанная в треугольник ABC делит медиану BM на три равные части. Найдите длины сторон BC и AB, если CM = 5.

Задача №8.

Вершина конуса и окружность, ограничивающая его основание, находятся на сфере. Длина образующей конуса равна 4 см, а его высота равна 2 см. Найти объём шара, ограниченного сферой (в см^3).

Задача №9.

Даны точки A(1;-2;1), B(3;-3;2), C(2;4;-3). Найти сумму координат точки M(x;y;z), если $\overline{AC} + 3\overline{CB} = 2\overline{BM}$

Задача №10.

При каких значениях параметра *k* уравнение $|4x + 5| = k|x - 4| + 2$ имеет единственный корень?