

**ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «ПОКОРИ ВОРОБЬЕВЫ ГОРЫ!»
ПО ФИЗИКЕ.**

2017/18 учебный год, ЗАДАНИЯ ОТБОРОЧНОГО ЭТАПА.

10 и 11 классы.

Возможные решения и критерии проверки.

Задание отборочного тура состояло из тестовой части (проверялись только **ответы**) и творческой части (проверялись и оценивались **решения**).

Часть I (тестовое задание): пример варианта.

Вопрос 1 (8 баллов):

Маленький мальчик катается на карусели, сидя почти неподвижно в кресле, которое вращается вокруг вертикальной оси карусели с угловой скоростью 2 рад/с по окружности с радиусом 2 м. Его отец едет на велосипеде со скоростью 10 м/с по дорожке, проходящей мимо карусели. В момент, когда он проезжает точку дорожки, наиболее близкую к карусели, его сын тоже проходит точку своей траектории, наиболее близкую к дорожке, при этом расстояние между ними равно 3 м, и их скорости относительно Земли сонаправлены. Найдите скорость отца в системе отсчета, связанной с сыном, в этот момент времени. Ответ запишите в м/с.

Ответ: 0.

Пояснение: Для получения ответа достаточно заметить, что если мысленно поместить отца неподвижно на карусель (в этом случае он, очевидно, покоится относительно сына), то на расстоянии 5 м от оси карусели его скорость относительно Земли как раз будет равна заданной (10 м/с)! Для более подробного решения нужно заметить, что движение отца в системе отсчета, связанной с сыном, состоит из поступательного движения со скоростью 6 м/с и вращения с угловой скоростью 2 рад/с по окружности с радиусом 3 м. Мгновенные скорости этих движений направлены в разные стороны, поэтому искомая скорость равна $(6-2 \times 3) \text{ м/с} = 0 \text{ м/с}$.

Вопрос 2 (8 баллов):

Один моль гелия нагревают таким образом, что его давление растет прямо пропорционально объему, увеличиваясь в 1,3 раза. Найти количество теплоты, подведенное к гелию в ходе этого процесса, если известно, что его начальная температура равнялась 200 К. Универсальная газовая постоянная $R \approx 8,31 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К})$. Ответ запишите в Джоулях, округлив до ближайшего целого.

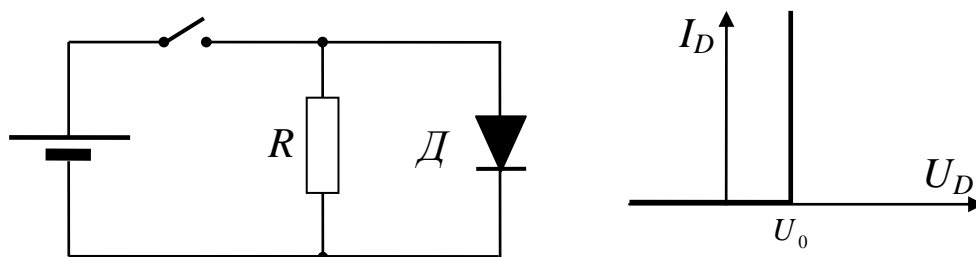
Ответ: 2294.

Пояснение: Поскольку $p = C \cdot V$, то температура $T = \frac{pV}{R} = \frac{p^2}{CR}$, то есть в процессе нагрева температура возрастает $(1,3)^2 = 1,69$ в раза. Поэтому $\Delta T = [1,69 - 1]T_1 = 138 \text{ К}$. В таком процессе $Q = A + \Delta U$, причем $\Delta U = \frac{3}{2}R \cdot \Delta T$, а работа (площадь под диаграммой процесса в координатах давление-объем) $A = \frac{p_1 + p_2}{2}(V_2 - V_1) = \frac{1}{2C}(p_2^2 - p_1^2) = \frac{1}{2}R \cdot \Delta T$. Значит, $Q = 2R \cdot \Delta T \approx 2294 \text{ Дж}$.

Вопрос 3 (9 баллов):

В схеме, показанной на рисунке, диод не является идеальным – его вольтамперная характеристика (зависимость силы тока от приложенного напряжения) показана на рисунке. Как видно, у диода есть некоторое пороговое напряжение, ниже которого он заперт даже при прямом включении, а при его превышении он пропускает любой ток (считаем, что это справедливо для токов, характерных для этой схемы). Известно, что величина ЭДС источника в 6 раз больше порогового напряжения диода, а внутреннее сопротивление источника во столько же раз меньше сопротивления резистора. Найдите отношение мощности, выделяемой на диоде, к мощности, выделяемой на резисторе. Ответ запишите в виде числа.

Ответ: 29.



Пояснение: Источник подключен к диоду в «правильной» полярности, и в отсутствие диода

напряжение на резисторе равнялось бы $U'_R = \frac{6U_0}{R + R/6} R = \frac{36}{7} U_0 > U_0$, то есть диод будет открыт. Значит, напряжение на диоде и резисторе на самом деле $U_R = U_D = U_0$, и

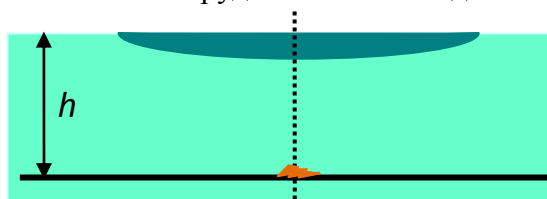
отношение мощностей равно отношению токов: $\frac{P_D}{P_R} = \frac{I_D}{I_R}$. Ток через резистор $I_R = \frac{U_0}{R}$, а ток

в ветви с источником определяется из уравнения $6U_0 - I \frac{R}{6} = U_0 \Rightarrow I = 30 \frac{U_0}{R}$.

Следовательно, $I_D = I - I_R = 29 \frac{U_0}{R}$. В итоге $\frac{P_D}{P_R} = 29$.

Часть II (творческое задание). «АРХИВЫ ПРОФЕССОРА ЧЕЛЛЕНДЖЕРА».

1. («Подводная оптика») Однажды профессор Челленджер производил наблюдения за обитателями пруда с чистой водой. При этом он использовал плосковыпуклую тонкую

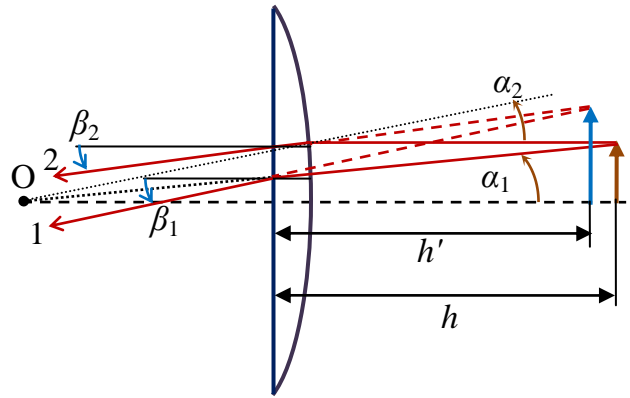


линзу, фокусное расстояние которой в воздухе равнялось $F = 30$ см. Линза размещалась на поверхности воды (см. рисунок). Профессор рассматривал мелкий объект, находившийся точно под центром линзы на глубине $h = 63$ см.

С каким поперечным увеличением был виден объект? Известно, что показатель преломления стекла, из которого изготовлена линза $n_{\text{ст}} = 2$, показатель преломления воды $n \approx \sqrt{2} \approx 1,414$.

Решение:

Рассмотрим два луча, падающей от крайней точки наблюдаемого объекта на линзу. Первый луч – идущий по радиусу сферической поверхности линзы. Он не преломляется на сферической поверхности линзы, и падает под углом $\alpha_1 \approx \frac{l}{R+h}$ на ее плоскую поверхность. Здесь l – размер объекта, а R – радиус сферической поверхности (в этой и последующих выкладках мы считаем все углы малыми, а толщиной линзы везде будем пренебрегать). После преломления на



границе раздела стекло-воздух этот луч будет направлен под углом $\beta_1 \approx n_{\text{л}} \alpha_1 \approx \frac{n_{\text{л}} l}{R+h}$ к главной оптической оси линзы. Второй луч – идущий параллельно главной оптической оси линзы. Угол его падения на сферическую поверхность равен $\alpha_2 \approx \frac{l}{R}$, и после преломления на границе раздела вода-стекло он будет идти под углом $\alpha'_2 \approx \frac{l}{R} - \frac{n}{n_{\text{л}}} \frac{l}{R} = \frac{n_{\text{л}} - n}{n_{\text{л}}} \frac{l}{R}$ к главной оптической оси. После преломления на плоской поверхности этот угол станет равным $\beta_2 \approx n_{\text{л}} \alpha'_2 \approx \frac{(n_{\text{л}} - n)l}{R}$. Численный анализ позволяет заметить, что $\beta_1 > \beta_2$, и

поэтому пересекаются продолжения этих лучей (то есть изображение объекта – мнимое). Обозначив h' расстояние от линзы до изображения, запишем два выражения для величины изображения: $l' \approx \frac{Rl}{R+h} + \beta_1 h' \approx l + \beta_2 h'$. Используя полученное соотношение как уравнение

для h' , находим: $h' = \frac{Rh}{nR - (n_{\text{л}} - n)h}$. Подставляя это значение во второе выражение,

определяем размер изображения $l' \approx l \cdot \left(1 + \frac{(n_{\text{л}} - n)h}{nR - (n_{\text{л}} - n)h} \right) = l \cdot \frac{nR}{nR - (n_{\text{л}} - n)h}$.

Следовательно, увеличение изображения $\Gamma = \frac{l'}{l} \approx \frac{nR}{nR - (n_{\text{л}} - n)h}$. Отметим, что для плоско-

выпуклой линзы с показателем преломления стекла $n_{\text{л}}$ в воздухе фокусное расстояние

$$F = \frac{R}{n_{\text{л}} - 1} \Rightarrow R = (n_{\text{л}} - 1)F. \text{ Поэтому окончательно } \Gamma = \frac{l'}{l} \approx \frac{n(n_{\text{л}} - 1)F}{n(n_{\text{л}} - 1)F - (n_{\text{л}} - n)h} \approx 7,7.$$

Примечание: В этой задаче есть целый ряд «альтернативных» путей: можно мысленно добавить «над» линзой бесконечно тонкий слой воды. Как известно, бесконечно тонкая параллельная пластина не вызовет смещения или преломления лучей, и задача сводится к анализу комбинации «линза в воде + преломление на границе раздела вода-воздух (в этом

случае ключевые формулы – это $\Gamma = n \frac{h'}{h}$, формула линзы $\frac{1}{h} - \frac{1}{nh'} = \frac{1}{F'}$ и формулы для

оптической силы линзы в воде $\frac{1}{F'} = \frac{n_{\text{л}} - n}{nR}$ и в воздухе $\frac{1}{F} = \frac{n_{\text{л}} - 1}{R}$). Также можно

использовать «обобщенную формулу линзы» для системы преломляющих поверхностей $-\frac{1}{h'} + \frac{n}{h} = \frac{n_L - n}{R}$ вместе с анализом хода одного из рассмотренных лучей. Но все эти пути должны приводить к тому же ответу.

ОТВЕТ: $\Gamma = \frac{l'}{l} \approx \frac{n(n_L - 1)F}{n(n_L - 1)F - (n_L - n)h} \approx 7,7.$

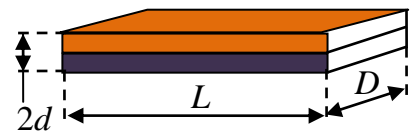
КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ:

действие	макс. балл	примечания
Построен ход двух лучей для обеих поверхностей линзы, или описано добавление тонкого слоя, или записана обобщенная формула линзы вместе с построением хода одного луча.	3	Или «первый шаг» другого пути, который приводит к ответу
Записана полная система соотношений, позволяющая найти увеличение	7	
Получена формула для увеличения	3	Допускается «составная» формула*
Правильный численный ответ	2	С учетом знака**
ВСЕГО	15	

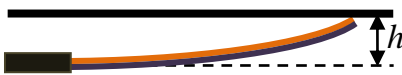
*например, увеличение через h' , h' через R , R через F и n_L .

** ответ «-7,7» оценивается в 1 балл вместо 2.

2. («Термомеханическое реле») В одном из опытов профессора Челленджера было необходимо, чтобы при достижении в установке определенной температуры подавался сигнал. Нужный датчик удалось изготовить на основе «биметаллической пластины», то есть двух длинных тонких пластин одинаковых размеров (длина L , ширина D , толщина d , причем $L \gg D \gg d$),



изготовленных из разных металлов и по всей поверхности соприкосновения прочно сваренных друг с другом. Металлы имеют разные коэффициенты теплового расширения $\alpha_1 \neq \alpha_2$ и разные модули Юнга $E_1 \neq E_2$. При температуре $t_0 = 0^\circ\text{C}$ пластина ровная, а при изменении температуры она изгибается по дуге окружности, и при достижении необходимой температуры t она касается контакта и замыкает цепь подачи сигнала. Для правильной регулировки датчика нужно подобрать расстояние h между плоскостью недеформированной пластины и поверхностью контакта. Выведите формулу «калибровочной зависимости» датчика $h(t)$.



Решение:

Везде в решении будем считать тепловые удлинения пластин очень малыми (по сравнению с L), а изменениями поперечных размеров пренебрежем. Изгиб пластины появляется из-за того, что коэффициенты теплового расширения различаются: «ненапряженная» длина каждой пластины изменяется при нагреве, и поэтому они перестают быть равными. Однако из-за прочной сварки длина пластин по линии сварки должна остаться одинаковой. В

результате пластина с меньшим α (далее для определенности будем считать, что $\alpha_1 < \alpha_2$) окажется в растянутом состоянии, а с большим – в сжатом, и возникает изгибающий пластину момент сил упругости. В условии есть указание, что пластины изгибаются по дуге окружности. Пусть R – радиус кривизны поверхности спайки, а \tilde{L} – ее длина в состоянии равновесия при температуре t . Тогда угловой размер изогнутой пластины $\varphi = \tilde{L}/R$ (см.

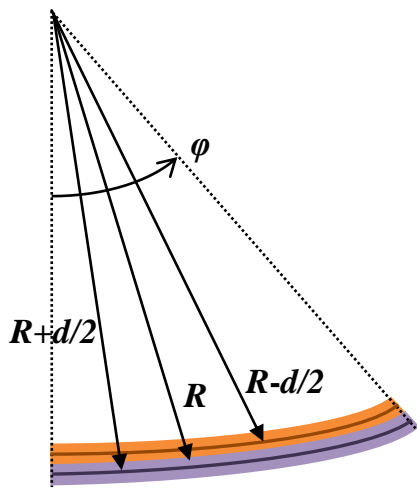


рисунок). Длина средней линии первой пластины в состоянии равновесия $L_1 = \varphi \left(R - \frac{d}{2} \right) = \tilde{L} \left(1 - \frac{d}{2R} \right)$, а второй $L_2 = \tilde{L} \left(1 + \frac{d}{2R} \right)$. Деформации этих пластин равны разности этих длин и «ненапряженной» длины каждой пластины, то есть:

$$\Delta L_1 = \tilde{L} \left(1 - \frac{d}{2R} \right) - L(1 + \alpha_1 t) > 0,$$

$$\Delta L_2 = \tilde{L} \left(1 + \frac{d}{2R} \right) - L(1 + \alpha_2 t) < 0.$$

Равновесная длина поверхности спайки определяется из условия уравнивания сил упругости: $k_1 \Delta L_1 + k_2 \Delta L_2 = 0$, где коэффициенты жесткости пластин выражаются через

модули Юнга и их размеры: $k_{1,2} = E_{1,2} \frac{Dd}{L}$. Таким образом, из условия равновесия сил

находим: $\tilde{L} = \frac{E_1(1 + \alpha_1 t) + E_2(1 + \alpha_2 t)}{E_1(1 - d/2R) + E_2(1 + d/2R)} L$. Это позволяет найти величину сил

упругости: например, $|F_1| = k_1 |\Delta L_1| = \frac{E_1 E_2 [(\alpha_2 - \alpha_1)t - d/R] D d^2}{E_1 + E_2 + (E_2 - E_1)d/2R}$. Ясно, что $|F_2|$ точно

такой же. Отметим: из этого выражения видно, что при ненапряженном изгибе ($|F_{1,2}| = 0$)

радиус изгиба удовлетворяет соотношению $\frac{d}{R} = (\alpha_2 - \alpha_1)t$, но такое выражение не

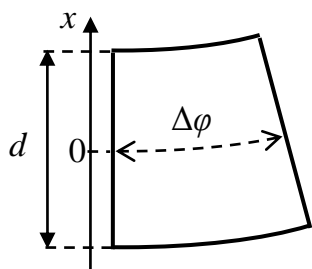
учитывает упругие свойства пластин, и этот результат может считаться «простой» оценкой

для радиуса изгиба. Конечно, в реальном случае $|F_{1,2}| > 0$ и поэтому $\frac{d}{R} < (\alpha_2 - \alpha_1)t \ll 1$.

Две силы упругости создают изгибающий момент сил, равный

$M_{изг} = |F_1| d = \frac{E_1 E_2 [(\alpha_2 - \alpha_1)t - d/R] D d^2}{E_1 + E_2 + (E_2 - E_1)d/2R}$. Рассмотрим теперь «тонкий поперечный

слой» первой пластины толщиной ΔL с угловым размером $\Delta\varphi = \Delta L/R$. «Средняя» деформация этой пластины вычислена для средней линии, но в



действительности «наружные» по отношению к изгибу слою растянуты сильнее, чем «внутренние». Если ввести координату x , отсчитываемую поперек пластины, то изменение деформации

по сравнению со средней линией $\delta L = x \cdot \Delta\varphi = x \cdot \Delta L/R$.

Поэтому изменения сил упругости в каждом слое толщиной dx равно (поскольку коэффициент жесткости $dk = E_1 D \cdot dx/\Delta L$)

$dF = \frac{E_1 D \cdot dx}{\Delta L} \delta L = \frac{E_1 D}{R} x dx$. Эти изменения создают вклад в момент сил упругости,

противоположный «изгибающему» моменту сил, и в состоянии равновесия они в точности компенсируют друг друга. Полный вклад в момент первой пластины вычисляется через

интегрирование: $M_1 = \int_{-d/2}^{+d/2} x \cdot dF = \frac{E_1 D}{R} \int_{-d/2}^{+d/2} dx x^2 = \frac{E_1 D d^3}{12R}$. Участникам, не знакомым с

интегрированием, пришлось бы исходить из того, что при суммировании малых вкладов ($M_1 = \sum x \cdot \Delta F = \frac{E_1 D}{R} \sum x^2 \Delta x$) можно заметить, что $x^2 \Delta x \approx \Delta \left(\frac{x^3}{3} \right)$, и тогда

$$\sum x^2 \Delta x = \sum \Delta \left(\frac{x^3}{3} \right) = \frac{1}{3} \left[\left(\frac{d}{2} \right)^3 - \left(-\frac{d}{2} \right)^3 \right] = \frac{d^3}{12} \quad (\text{ясно, что по сути это то же самое}$$

интегрирование). Аналогично вклад второй пластины $M_2 = \frac{E_2 D d^3}{12R}$, и условие равновесия

$M_{изг} = M_1 + M_2$ позволяет определить радиус кривизны. Как видно, это условие приводит к уравнению

$$\begin{aligned} \frac{E_1 E_2 [(\alpha_2 - \alpha_1)t - d/R] D d^2}{E_1 + E_2 + (E_2 - E_1)d/2R} &= \frac{(E_1 + E_2) D d^3}{12R} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{12 E_1 E_2}{(E_1 + E_2)^2} \left[(\alpha_2 - \alpha_1)t - \frac{d}{R} \right] &= \frac{d}{R} \left[1 + \frac{E_2 - E_1}{E_1 + E_2} \frac{d}{2R} \right]. \end{aligned}$$

Решая это квадратное уравнение относительно d/R , находим положительный корень, равный нулю при $t = 0^\circ C$: например, при $E_2 > E_1$ это $\frac{d}{R} = -A + \sqrt{A^2 + B}$. Здесь

$$A \equiv \frac{12 E_1 E_2 + (E_1 + E_2)^2}{E_2^2 - E_1^2}, \quad \text{а} \quad B \equiv \frac{24 E_1 E_2 (\alpha_2 - \alpha_1)t}{E_2^2 - E_1^2}.$$

Здесь следует отметить, что коэффициенты теплового расширения большинства металлов порядка $10^{-5} K^{-1}$. Поэтому даже для температур порядка $100^\circ C$ величина $(\alpha_2 - \alpha_1)t$ порядка 10^{-3} . Считая модули Юнга материалов величинами одного порядка, а $(\alpha_2 - \alpha_1)t \ll 1$, преобразуем это выражение к

более простому виду: $\frac{d}{R} \approx \frac{12 E_1 E_2}{12 E_1 E_2 + (E_1 + E_2)^2} (\alpha_2 - \alpha_1)t$ (для $E_2 < E_1$ получается такое

же выражение). Как мы и ожидали, равновесное значение $d/R < (\alpha_2 - \alpha_1)t \ll 1$. Итак: радиус кривизны линии «спайки» удовлетворяет соотношению

$$\frac{1}{R(t)} \approx \frac{12 E_1 E_2}{12 E_1 E_2 + (E_1 + E_2)^2} \frac{(\alpha_2 - \alpha_1)t}{d}. \quad \text{Угол изгиба пластины } \varphi = \frac{\tilde{L}}{R}.$$

Если отсчитывать h от плоскости «спайки» (как было показано на рисунке в условии), то контакт достигается,

если $h - d = R[1 - \cos(\tilde{L}/R)]$. Здесь предполагается, что параметры пластины подобраны

таким образом, чтобы выполнялось требование $\varphi < \pi$ (при $\varphi \geq \pi$ пластина

«сворачивается», и h практически перестает расти при дальнейшем изгибе, что неудобно

для конструирования датчика). Заметим также, что отличие \tilde{L} от L очень мало:

$\tilde{L} \approx L \left[1 + \frac{\alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2}{E_1 + E_2} t \right]$, и в рамках используемой точности им можно пренебречь. Тогда

$h(t) \approx d + R(t)[1 - \cos(L/R(t))]$. На самом деле удобнее всего подобрать параметры так, чтобы выполнялись соотношения $h \gg d$ и $\varphi \ll 1$ (например, $L = 100d$, и для «нужной» температуры $(\alpha_2 - \alpha_1)t \approx 0,001$). Тогда «калибровочная зависимость» датчика имеет наиболее простой и удобный линейный вид

$$h(t) \approx \frac{L^2}{2R(t)} \approx \frac{6E_1E_2(\alpha_2 - \alpha_1)L^2}{[12E_1E_2 + (E_1 + E_2)^2]d} \cdot t.$$

Примечание: Конечно, основная часть решения задачи – это вывод формулы для радиуса кривизны. При использовании «готовой» формулы баллы за эту часть решения не начислялись. Однако (см. критерии проверки) баллы начислялись и за вывод этой формулы в более простых (хоть и менее точных) моделях. Самая простая модель (модель 1, оценочная) состоит в следующем: нужно считать, что реальный изгиб будет близок к изгибу в «ненапряженном» состоянии (когда средние силы упругости каждой пластины равны нулю). Тогда радиус можно оценить из чисто геометрических соображений: длина каждой из пластин равна «равновесному» значению, то есть $L_1 = \varphi \left(R - \frac{d}{2} \right) = L(1 + \alpha_1 t)$ и

$L_2 = \varphi \left(R + \frac{d}{2} \right) = L(1 + \alpha_2 t)$. Разделив эти соотношения одно на другое, найдем:

$R \approx \frac{d}{(\alpha_2 - \alpha_1)t}$ – в точном соответствии с тем, что мы раньше получали при $F = 0$. В более

сложной модели (модель 2) можно пренебречь изгибом при использовании условия баланса сил упругости для вычисления \tilde{L} . В этом случае условие равновесия сил имеет вид $k_1[\tilde{L} - L(1 + \alpha_1 t)] = k_2[L(1 + \alpha_2 t) - \tilde{L}]$. Выкладки, аналогичные приведенным в решении (но теперь для d/R получается более простое линейное уравнение), приводят к результату $\frac{d}{R} \approx \frac{3E_1E_2}{(E_1 + E_2)^2}(\alpha_2 - \alpha_1)t$. Он отличается от правильного, но при близких величинах

модулей Юнга дает почти те же значения радиуса кривизны. Конечно, можно было использовать и другие модели, и оценка за эту часть задачи в основном определялась точностью выбранной модели и правильностью вычислений в рамках модели. Конечно, важное значение имеет и обоснование выбора той или иной модели. Например, в «авторской» модели пренебрегается влиянием теплового расширения на толщину слоев пластины. Дело здесь в том, что при учете этого обстоятельства в рамках аналогичного подхода объем вычислений вырастает значительно, а точность увеличивается очень незначительно – возникающие поправки к величине d/R содержат множители $[(\alpha_2 - \alpha_1)t]^2$ или $(\alpha_2 - \alpha_1)t \cdot \frac{d}{L}$, и поэтому их влияние на результат очень мало.

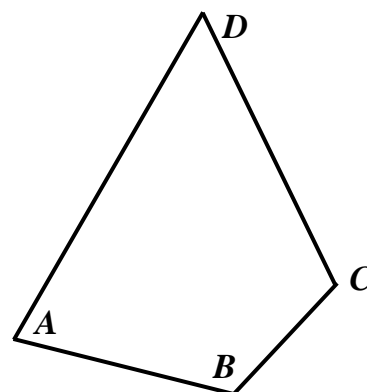
ОТВЕТ: при «оптимальном» выборе параметров системы $\left(\frac{d}{(\alpha_2 - \alpha_1)t} \gg L \gg D \gg d \right)$

$$h(t) \approx \frac{6E_1E_2(\alpha_2 - \alpha_1)L^2}{[12E_1E_2 + (E_1 + E_2)^2]d} \cdot t.$$

КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ:

действие	макс. балл	примечания
Записано условие равновесия сил упругости слоев	3	при учете изгиба; без учета (модель 2 или аналогичная): 2 балла ; используется условие отсутствия напряжений: 1 балл .
Получено выражение для \tilde{L}	3	при учете изгиба; без учета (модель 2 или аналогичная) или при записи уравнения для длин слоев «ненапряженной» пластины: 2 балла .
Записано условие равновесия моментов сил упругости	2	в модели, которая по точности не уступает авторской; в модели 2 или аналогичной по точности: 1 балл .
Вычислены все моменты сил, входящие в условие равновесия	4	в модели, которая по точности не уступает авторской; в модели 2 или аналогичной по точности: 2 балла .
Получено выражение для кривизны пластины	4	в модели, которая по точности не уступает авторской; в модели 2 или аналогичной по точности: 2 балла ; при использовании условия отсутствия напряжений: 1 балл .
Записано общее выражение связи h и R	3	Есть выражение только для более частного случая: 2 балла .
Приведен ответ для калибровочной зависимости	1	
Проведен анализ с учетом того, что $\frac{d}{R} < (\alpha_2 - \alpha_1)t \ll 1$	3	
Указано ограничение, связанное с возможностью «скручивания»	1	
Произведен подбор параметров для «наиболее удобной» зависимости	1	
ВСЕГО	25	

3. («Поиски нуля») В одной из записных книжек профессора Челленджера найдено упоминание об «особенном четырехугольнике». Плоский четырехугольный каркас $ABCD$ был изготовлен из непроводящего жесткого стержня и имел стороны с длинами $|AB| = 3$ см, $|BC| = 2$ см, $|CD| = 4$ см, и $|DA| = 5$ см. Площадь четырехугольника равнялась $S \approx 10,78$ см². На этот каркас по всему периметру был равномерно нанесен заряд. В записной книжке утверждалось, что у этого четырехугольника есть точка, в которой напряженность электрического поля равна нулю. Найдите эту точку, определите расстояние от нее до каждой из сторон четырехугольника и укажите еще хотя бы один пример равномерно заряженного четырехугольника,



имеющего такую точку.

Решение:

Докажем сначала следующее утверждение: вектор напряженности электростатического поля \vec{E} , созданного равномерно заряженным с плотностью λ отрезком АВ в точке С, не лежащей на прямой АВ, равен вектору напряженности \vec{E}' , создаваемому равномерно заряженной с той же плотностью λ дугой А'В' окружности радиуса СН с центром С (см. рис. 1). Непосредственный расчет доказывает это утверждение. Действительно, для бесконечно малого элемента dl отрезка АВ, расположенного в точке D, имеем следующее выражение для проекции электростатического поля \vec{E} на направление от этого элемента к точке С: $dE = \frac{k dq}{R^2} = \frac{k \lambda dl}{R^2}$, где $R \equiv |CD|$. Для

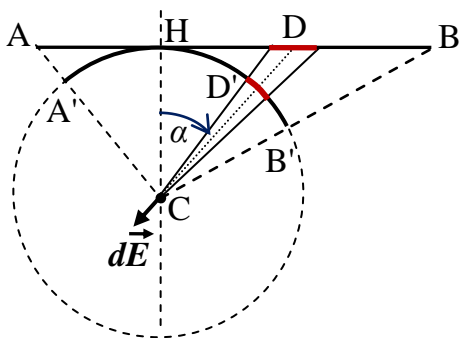


рис. 1.

соответствующего малого элемента dl' дуги А'В' аналогичное выражение для электростатического поля $dE' = \frac{k dq'}{r^2} = \frac{k \lambda dl'}{r^2}$, где $r \equiv |CH|$ – радиус кривизны дуги. Учитывая соотношения $dl' = \frac{r}{R} dl \cdot \cos(\alpha)$ и $r = R \cos(\alpha)$, получим, что

$$dE' = \frac{k \lambda}{(R \cdot \cos(\alpha))^2} \frac{R \cos(\alpha)}{R} dl \cos(\alpha) = \frac{k \lambda dl}{R^2} = dE.$$

Направление этих векторов совпадает, поэтому $d\vec{E}' = d\vec{E}$. Таким образом, поля, созданные соответственно малыми элементами dl и dl' , равны друг другу. Суммируя поля всех малых элементов отрезка АВ и дуги А'В', доказываем равенство полей, созданными ими: $\vec{E}' = \vec{E}$, т.е. утверждение доказано. Можно отметить, что из него сразу же следует, что поле равномерно заряженного отрезка направлено вдоль биссектрисы угла АСВ.

Теперь заметим, что в данном четырехугольнике суммы противоположных сторон равны, следовательно, существует вписанная в него окружность.

Рассмотрим ее центр О (рис. 2). Согласно доказанному утверждению, можно заменить при расчете поля в точке О каждую сторону четырехугольника соответствующей дугой вписанной окружности. Сделав это, убеждаемся, что поле четырехугольника в точке О равно полю вписанной в него окружности в ее центре, а из соображений симметрии ясно, что поле в центре равномерно заряженной окружности равно нулю. Таким образом, требуемая точка – это центр вписанной окружности. Расстояние от этой точки до всех сторон

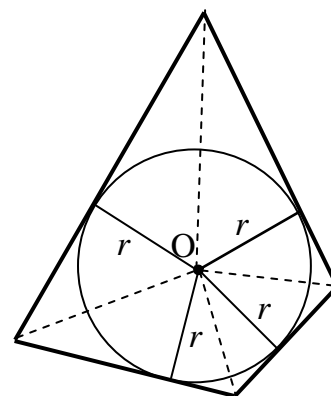


рис.2.

четырехугольника равно радиусу вписанной окружности, который можно найти как отношение площади четырехугольника к его полупериметру: $r = \frac{2S}{P} \approx 1,54$ см. Кроме того,

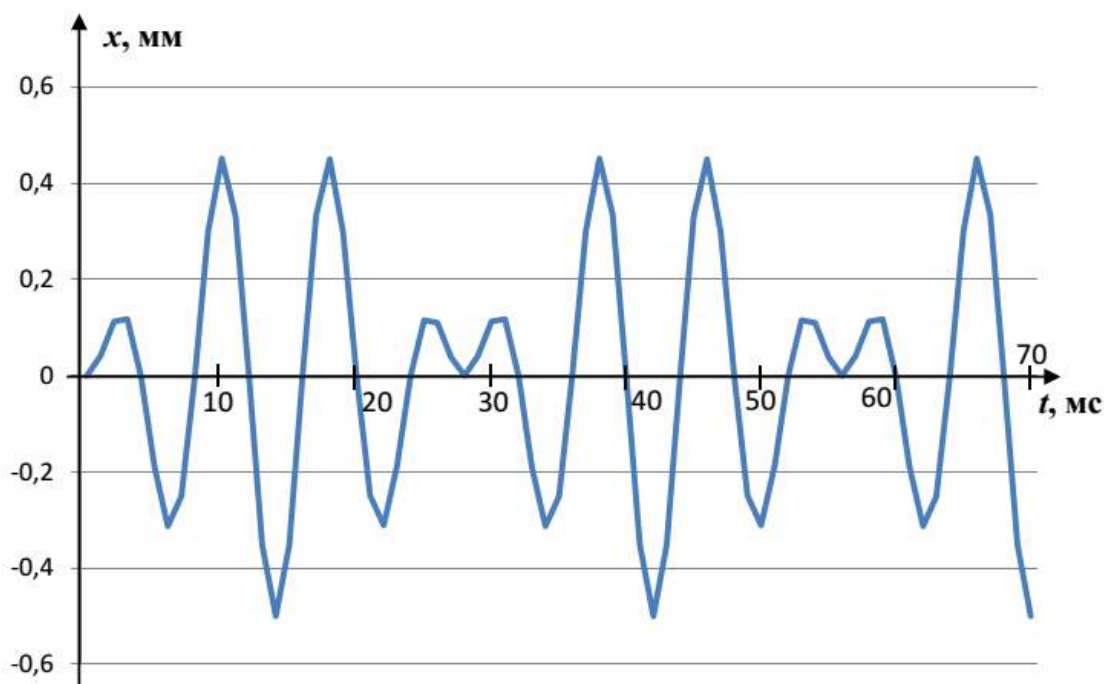
понятно, что для любого равномерно заряженного по периметру выпуклого многоугольника, у которого существует вписанная окружность, центр этой окружности – это точка, в которой напряженность электростатического поля равна нулю. Поэтому в качестве примера подойдет любой выпуклый четырехугольник, у которого суммы длин противоположных сторон равны. Вместе с тем можно найти и другие примеры. Например, такая точка очевидно существует у любого прямоугольника – это его центр.

ОТВЕТ: центр вписанной в ABCD окружности (он же – точка пересечения биссектрис), расстояние до всех сторон $r \approx 1,54$ см, любой выпуклый четырехугольник, у которого суммы длин противоположных сторон равны или прямоугольник.

КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ:

действие	макс. балл	примечания
Есть идея преобразования поля отрезка в поле окружности (или другая, обеспечивающая возможность правильного решения)	2	«другие идеи»: использовать формулу поля отрезка или поля «симметричного угла» конечных размеров
Преобразование доказано (или выведена используемая формула)	6	При «угадывании» нужной точки баллы не начисляются
Обнаружена нужная точка	3	При «угадывании»: 2 балла.
Вычислено расстояние до сторон	3	При «угадывании»: 2 балла.
Приведен правильный пример аналогичного четырехугольника	1	Достаточно одного, даже «случайно» выбранного!
ВСЕГО	15	

4. («Гравитационная волна») Судя по записям в архивах, профессор Челенджер много внимания уделял поиску гравитационных волн. Для этой цели он создал детектор в виде тяжелого груза и пружины, которые были помещены в вакуумную камеру. Крепление камеры было снабжено специальными устройствами, изолирующими ее от колебаний здания. В состоянии покоя груз растягивал пружину на $\Delta l_0 = (7,000 \pm 0,005)$ см (здесь и далее указаны погрешности, с которыми известны данные эксперимента). Профессору удалось обеспечить очень слабое затухание колебаний груза: после выведения его из равновесия в процессе свободных колебаний амплитуда убывала в два раза примерно за 1000 периодов колебания. Однажды детектор зарегистрировал почти периодический сигнал продолжительностью около 900 с, в течении которых груз колебался практически вертикально (угол отклонения оси колебаний от вертикали не превышал $0,1^\circ$). На графике представлена временная зависимость отклонений груза $x(t)$ от положения равновесия на участке длительностью 70 мс, взятом из «средней части» сигнала (на других аналогичных участках картина с высокой точностью повторялась):



Анализ показал, что эту кривую можно (с отклонениями, не превышающими 0,01 мм) описать формулой $\bar{x}(t) = A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right) \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{7T}t\right)$, где $A = (0,50 \pm 0,01)$ мм, а $T = (8,00 \pm 0,01)$ мс. Предположим, что этот сигнал был вызван гравитационным излучением, которое является наложением гармонических колебаний вида $\delta \vec{g}(t) = \vec{g}_m \cos(\omega t + \varphi)$. Здесь $\delta \vec{g}$ – изменение ускорения свободного падения, вызванное волной. В рамках этого предположения найдите:

- спектр сигнала (то есть набор частот гармонических колебаний, из которых он состоит);
- амплитуду ($|\vec{g}_m|$) каждого из гармонических колебаний.

Насколько реалистично это предположение? При ответе на этот вопрос учтите, что сигнал, зарегистрированный 14.09.2015 детекторами LIGO, вносил в ускорение свободного падения искажения порядка $10^{-12} g$.

Решение:

Формулу, с хорошей точностью описывающую сигнал, можно представить как сумму гармонических колебаний, воспользовавшись тригонометрической формулой $\sin(\alpha)\sin(\beta) = \frac{1}{2}\cos(\alpha - \beta) - \frac{1}{2}\cos(\alpha + \beta)$. Тогда обнаруживаем, что

$$\bar{x}(t) = \frac{A}{2} \cdot \cos\left(\frac{12\pi}{7T}t\right) - \frac{A}{2} \cdot \cos\left(\frac{16\pi}{7T}t\right).$$

Так как периоды этих колебаний порядка десятка миллисекунд, то к «сердине сигнала» длительностью 900 с пройдет несколько десятков тысяч периодов колебаний. Следовательно, возбужденные включением сигнала собственные колебания груза к этому моменту практически затухнут, и наблюдаемую часть сигнала необходимо рассматривать как вынужденные колебания под действием периодической силы. Вынужденные колебания происходят с частотой вынуждающей силы, поэтому частоты гармонических составляющих предполагаемого сигнала – это $\nu_1 = \frac{6}{7T} \approx (107,14 \pm 0,14)$ Гц и $\nu_2 = \frac{8}{7T} \approx (142,86 \pm 0,18)$ Гц. В этих значениях сохранен один «лишний» разряд, чтобы уменьшить потери точности при

округлении. Пренебрегая диссипативными силами на интервалах времени порядка нескольких периодов колебаний, запишем уравнение колебаний под действием одной вертикальной гармонической составляющей (координата x – отклонение груза по вертикали от положения равновесия): $ma_x = -kx + mg_m \cos(\omega t)$. Здесь m и k – масса груза и жесткость пружины, а начало отсчета времени выбрано так, чтобы начальная фаза колебаний гравитационного поля равнялась нулю. Поскольку ускорение есть вторая производная координаты по времени $a_x = x''$, то это – уравнение вынужденных гармонических колебаний $x'' + \omega_0^2 x = g_m \cos(\omega t)$ ($\omega_0^2 \equiv \frac{k}{m}$). Если искать его решение в виде колебаний на частоте вынуждающей силы $x(t) = x_m \cos(\omega t)$, то можно установить связь амплитуды сигнала с амплитудой вынужденных колебаний груза: $x_m = \frac{g_m}{\omega_0^2 - \omega^2}$. В нашем

случае оказалось, что амплитуды колебаний под действием двух гармонических компонент сигнала совпали по величине, и при этом эти колебания происходят в противофазе. Это, как видно из найденной формулы, означает, что сигналы имели сдвиг по фазе на π , причем

$$\frac{A}{2} = \frac{g_{m1}}{\omega_1^2 - \omega_0^2} = \frac{g_{m2}}{\omega_2^2 - \omega_0^2}. \text{ Отметим также, что известная нам с высокой точностью величина}$$

$$\Delta l_0 = \frac{mg}{k} = \frac{g}{\omega_0^2} \Rightarrow \omega_0^2 = \frac{g}{\Delta l_0}. \text{ Эти соотношения позволяют нам найти амплитуды сигналов.}$$

Отметим, что нам неизвестно расположение лаборатории профессора Челленджера, поэтому мы будем вынуждены использовать значение ускорения свободного падения $g \approx (9,81 \pm 0,03) \text{ м/с}^2$ (этот интервал вмещает в себя значения практически для всей поверхности Земли). В этом случае:

$$g_{m1} = \frac{gA}{2\Delta l_0} \left(\frac{\Delta l_0 \omega_1^2}{g} - 1 \right) \approx (11,5 \pm 0,3)g \approx (113 \pm 3) \text{ м/с}^2,$$

$$g_{m2} = \frac{gA}{2\Delta l_0} \left(\frac{\Delta l_0 \omega_2^2}{g} - 1 \right) \approx (20,5 \pm 0,5)g \approx (201 \pm 5) \text{ м/с}^2.$$

На самом деле можно заметить, что основной вклад в погрешность вносит ошибка в определении A (2%), и а соотношение $\omega_0^2 / \omega_{1,2}^2$ порядка нескольких сотых процента. Поэтому можно было обойтись и без использования ускорения свободного падения (оно потребовалось только для оценки ω_0), что даже немного повысит точность:

$$g_{m1} \approx \frac{A}{2} \omega_1^2 \approx (113,3 \pm 2,3) \text{ м/с}^2, \quad g_{m2} \approx \frac{A}{2} \omega_2^2 \approx (201,4 \pm 4,2) \text{ м/с}^2.$$

Примечание: То, что свободные колебания практически не вносят вклад в наблюдаемый сигнал, видно по самому сигналу – в нем нет колебаний на частоте около 2 Гц! Формально роль диссипации можно учесть (для этого в условии достаточно информации), но вычисления показывают, что влияние диссипации на результат значительно меньше имеющихся ошибок определения, поэтому ее учет не имеет смысла, и баллы за него не начислялись.

ОТВЕТ: $\nu_1 = \frac{6}{7T} \approx (107,14 \pm 0,14) \text{ Гц}$, $g_{m1} \approx (113,3 \pm 2,3) \text{ м/с}^2$ и $\nu_2 = \frac{8}{7T} \approx (142,86 \pm 0,18) \text{ Гц}$, $g_{m2} \approx (201,4 \pm 4,2) \text{ м/с}^2$, предположение нереалистично.

КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ:

действие	макс. балл	примечания
Формула для аппроксимации приведена к суперпозиции гармоник.	2	
Правильно найдены частоты (или циклические частоты) гармоник	4	По 2 балла за каждую частоту
Показано, что регистрируемое колебание можно рассматривать как вынужденные колебания	2	
Указано, что на данном участке времени можно не учитывать диссипацию	1	
Получена формула для амплитуды вынужденных колебаний	4	
Найдены амплитуды гармоник (с использованием «табличного» значения g только для оценки)	6	По 3 балла за каждую амплитуду. При вычислении с прямым использованием значения $g - 2 \times 2 = 4$ балла
Сделан правильный мотивированный вывод о реалистичности предположения	1	
ВСЕГО	20	