10 и 11 классы.

Задания, возможные решения и ответы для всех использованных вариантов.

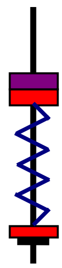
БИЛЕТ № 1 (САРАТОВ)

Задание 1.

Вопрос: Лифт движется вертикально вниз с ускорением a в однородном поле тяжести g. Внутри лифта находится небольшой мячик массой m. В установившемся режиме мячик покоится относительно лифта. Как зависит величина силы, с которой мячик действует на лифт, от величины a?

Ответ: В установившемся режиме мячик движется с ускорением $\vec{a}$, создаваемым результирующей силой $\vec{F} + m\vec{g} = m\vec{a}$, где $\vec{F}$ – сила, действующая на мячик со стороны лифта. По третьему закону Ньютона искомая сила $\vec{F}' = -\vec{F} = m(\vec{g} - \vec{a})$. Поэтому величина этой силы $F' = m|g - a|$, то есть она убывает от mg до нуля, когда ускорение растет от нуля до значения g, а затем линейно растет с ростом a. Можно обратить внимание, что при $a < g$ мячик покоится на полу лифта, а при $a > g$ – на потолке.

Задача: На гладком вертикальном стержне надеты три шайбы, которые при скольжении по стержню остаются горизонтальными. Нижняя шайба с массой m покоится на жестком упоре, вторая и третья – с одинаковыми массами $2m$ – покоятся вместе на невесомой длинной пружине жесткостью k, соединяющей вторую шайбу с первой. Ось пружины совпадает с осью стержня. Верхнюю пару шайб опускают вниз так, что величина деформации пружины увеличивается в полтора раза и отпускают, подтолкнув вниз с некоторой скоростью. При какой максимальной величине этой скорости вторая и третья шайба будут совершать гармонические колебания? Ускорение свободного падения g.



Решение: Если в процессе движения верхние шайбы не будут отрываться друг от друга, а нижняя – от упора, то пара верхних шайб будет совершать гармонические колебания с частотой $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{4m}}$. В состоянии покоя пружина сжата на величину $\Delta l_0 = -\dfrac{4mg}{k}$, и после смещения верхней пары шайб эта деформация увеличивается до $\dfrac{3}{2}\Delta l_0 = -\dfrac{6mg}{k}$, и отклонение от положения равновесия составит $x_0 = \dfrac{2mg}{k}$. При старте с начальной скоростью амплитуда возникших гармонических колебаний должна равняться $x_m = \sqrt{x_0^2 + \dfrac{4m}{k}v_0^2} = \sqrt{\dfrac{4m^2g^2}{k^2} + \dfrac{4m}{k}v_0^2}$. Итак, максимальное растяжение пружины может равняться $\sqrt{\dfrac{4m^2g^2}{k^2} + \dfrac{4m}{k}v_0^2} - \dfrac{4mg}{k}$, и нижняя шайба не отрывается от упора, если сила упругости растянутой пружины не превышает ее веса: $\sqrt{\dfrac{4m^2g^2}{k^2} + \dfrac{4m}{k}v_0^2} - \dfrac{4mg}{k} \le \dfrac{mg}{k}$. Из этого ограничения видно, что $v_0 \le g\sqrt{\dfrac{21m}{4k}}$. Верхние шайбы не будут отрываться друг от друга, если им не придется опускаться с ускорением больше g. Амплитуда ускорения $a_m = \omega^2 x_m$, и поэтому это условие выполняется при $\dfrac{k}{4m}\sqrt{\dfrac{4m^2g^2}{k^2} + \dfrac{4m}{k}v_0^2} \le g$, откуда

$v_0 \le g\sqrt{\dfrac{3m}{k}}$. Это ограничение является более жестким, поэтому именно оно дает ответ на вопрос задачи.

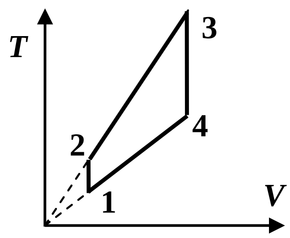
Ответ: при $v_0 \le g\sqrt{\dfrac{3m}{k}}$.

Задание 2.

Вопрос: Температуру одного моля одноатомного идеального газа увеличили изохорически на ΔT, а затем изобарически еще на такую же величину. Во сколько раз сообщенное газу во всем процессе количество теплоты больше совершенной им работы?

Ответ: Учитывая величины молярных теплоемкостей одноатомного идеального газа $c_V = \frac{3}{2}R$ и $c_p = \frac{5}{2}R$, находим, что сообщенное газу во всем процессе количество теплоты $Q = \frac{3}{2}R\Delta T + \frac{5}{2}R\Delta T = 4R\Delta T$. Работа совершается газом только в изобарном процессе, в котором $A = p\Delta V = \Delta(pV) = R\Delta T$. Значит, сообщенное газу во всем процессе количество теплоты больше совершенной им работы в 4 раза.

Задача: На рисунке представлена TV–диаграмма цикла, в котором участвует постоянное количество одноатомного идеального газа. КПД этого цикла равен $\eta = 8\%$. Известно, что температура в состоянии 4 во столько же раз больше температуры в состоянии 2, во сколько последняя больше температуры в состоянии 1 $T_1 = 250$ К. Найти T_4.



Решение: Нетрудно заметить, что процессы 1-2 и 3-4 – изохорные, а процессы 2-3 и 4-1 – изобарные (температура растет пропорционально объему). Таким образом, в координатах давление-объем диаграмма этого цикла имеет вид прямоугольника. Пусть $T_2 = xT_1$. Тогда, согласно условию, $T_4 = xT_2 = x^2T_1$. Кроме того, $\frac{T_3}{T_2} = \frac{V_3}{V_2} = \frac{V_4}{V_1} = \frac{T_4}{T_1} = x^2$, и поэтому $T_3 = x^3T_1$.

Работа в цикле есть сумма работ в изобарических процессах, для каждого из которых $A = p\Delta V = \Delta(pV) = \nu R\Delta T$. Поэтому $A = \nu R(T_3 - T_2 + T_1 - T_4) = (x-1)^2(x+1)\nu RT_1$. Теплота нагревателя есть сумма количеств теплоты, подведенных в процессах с повышением температуры (изохора 1-2 и изобара 2-3): $Q = \frac{3}{2}\nu R(T_2 - T_1) + \frac{5}{2}\nu R(T_3 - T_2) = \frac{1}{2}(x-1)(5x^2+5x+3)\nu RT_1$. Следовательно, КПД цикла $\eta = \dfrac{2(x^2-1)}{5x^2+5x+3}$. Из этого соотношения можно найти x. Поскольку $(2-5\eta)x^2 - 5\eta x - 2 - 3\eta = 0$, то, выбирая положительный корень: $x = \dfrac{5\eta + \sqrt{16 - 16\eta - 35\eta^2}}{2(2-5\eta)} \approx 1{,}315$. Следовательно, $T_4 = x^2T_1 \approx 432$ К.

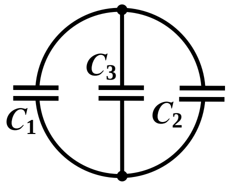
Ответ: $T_4 = x^2T_1 \approx 432$ К, где $x = \dfrac{5\eta + \sqrt{16 - 16\eta - 35\eta^2}}{2(2-5\eta)}$.

Задание 3.

Вопрос: Проволочное металлическое кольцо площадью S помещено в магнитное поле, перпендикулярное плоскости кольца. Индукция магнитного поля увеличивается с постоянной скоростью $\frac{\Delta B}{\Delta t} \equiv b = const$. Какое напряжение покажет идеальный вольтметр, подключенный к точкам кольца, угловой размер дуги между которыми равен 120°?

Ответ: ЭДС, создаваемое вихревым электрическим полем в дуге кольца, пропорционально ее длине, так же, как и сопротивление дуги. Индукционный ток равен отношению полной ЭДС E к полному сопротивлению R, то есть напряжение на концах дуги $U = \frac{\mathrm{E}}{3} - \frac{\mathrm{E}}{R}\frac{R}{3} = 0$.

Задача: Три конденсатора с емкостями $C_1 = 1$ мкФ, $C_2 = 2$ мкФ, $C_3 = 3$ мкФ соединены в контур в виде окружности с перемычкой по диаметру. Контур помещен в переменное магнитное поле, скорость изменения потока через контур постоянна и составляет $f = 10$ Вб/с. Какой заряд образуется при этом на обкладках конденсатора C_3?



Решение: Рассмотрим два контура, представляющие собой полуокружности. В каждом таком контуре будет наводиться ЭДС индукции $\mathrm{E} = \frac{f}{2}$**.** Тогда сумма падений напряжений на элементах каждого контура равна сумме ЭДС, действующих в этом контуре. Таким образом, $\frac{q_3}{C_3} - \frac{q_1}{C_1} = -\frac{f}{2}$ и $\frac{q_3}{C_3} - \frac{q_2}{C_2} = \frac{f}{2}$. При этом сумма зарядов трех соединенных обкладок должна равняться нулю: $q_1 + q_2 + q_3 = 0$. Выражая из первых двух уравнений q_1 и q_2, и подставляя их в третье уравнение, находим: $q_3 = \frac{C_3(C_2 - C_1)}{C_1 + C_2 + C_3}\frac{f}{2} = 2{,}5$ мкКл. На самом деле нам не было задано направление потока, поэтому мы не можем определить полярность заряда конденсатора – только величину.

Ответ: $q_3 = \frac{C_3 |C_2 - C_1|}{C_1 + C_2 + C_3}\frac{f}{2} = 2{,}5$ мкКл.

Задание 4.

Вопрос: Линза, плоскость которой вертикальна, формирует действительное перевернутое изображение пламени свечи. Свечу немного отодвинули от линзы. Что стало с размером изображения?

Ответ: Действительное перевернутое изображение создает собирающая линза при расстоянии от свечи до линзы, превосходящим фокусное расстояние линзы. При увеличении расстояния от свечи до линзы a расстояние b от линзы до изображения уменьшается (в соответствии с формулой линзы $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = D > 0$). Поскольку соотношение размеров изображения и предмета равно соотношению расстояний от них до линзы, то размер изображения уменьшится.

Задача: Точки A, B и C находятся на главной оптической оси тонкой собирающей линзы (B находится между A и C). Расстояния между точками $|AB| \equiv a = 5$ см и $|BC| \equiv b = 10$ см. Если источник света поместить в точку A, то его изображение окажется в точке B, если источник поместить в точку B, то изображение будет в точке C. Найдите фокусное расстояние линзы.

Решение: Если бы в точке B было действительное изображение источника, то при перенесении источника в точку B изображение оказалось бы в точке A, а не точке C.

Следовательно, в точке B находилось мнимое изображение источника из точки A. Значит, линза находится слева от точки A, а изображения в точках B и C – мнимые. Пусть x – расстояние от линзы до точки A. Тогда, записывая формулу линзы для обоих случаев, получим: $\frac{1}{x}-\frac{1}{x+a}=\frac{1}{F}$ и $\frac{1}{x+a}-\frac{1}{x+a+b}=\frac{1}{F}$. Вычтем из первого уравнения второе, приведем полученное выражение к общему знаменателю, и получим $x=\frac{a(a+b)}{b-a}$.

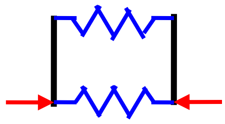
Подставляем это выражение в первое уравнение и находим, что $F=\frac{2ab(a+b)}{(b-a)^2}=60$ см.

Ответ: $F=\frac{2ab(a+b)}{(b-a)^2}=60$ см.

БИЛЕТ № 2 (СТАВРОПОЛЬ)

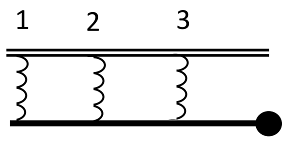
Задание 1.

Вопрос: Два одинаковых стержня, соединенные одинаковыми невесомыми пружинами, покоятся на гладкой горизонтальной поверхности. Одну из пружин начинают медленно сжимать, действуя парой «встречных» сил, направленных строго вдоль оси пружины. Что при этом будет происходить с другой пружиной – она будет растягиваться или сжиматься? Ответ объяснить.



Ответ: При «медленном» сжатии можно считать, что колебания не возникают, и поворот стержней от начальной ориентации происходит «квазиравновесно», то есть в любой момент времени сумма моментов сил, действующих на каждый из стержней, равен нулю. Тогда, записывая условия равновесия моментов относительно точки приложения внешней силы, замечаем, что момент силы упругости сжимаемой пружины относительно этой точки равен нулю, и поэтому равен нулю и момент силы упругости другой пружины, плечо которой относительно этой точки не равно нулю. Значит, сила упругости другой пружины должна быть равна нулю, и поэтому эта пружина не будет деформироваться. Отметим, что при неравенстве модулей внешних сил вся система в отсутствии колебаний будет двигаться с постоянным ускорением, но это не изменит вывода об отсутствии деформации у второй пружины.

Задача: На конце легкого стержня, прикрепленного с помощью трех одинаковых вертикальных невесомых пружин к горизонтальному потолку, находится груз массой m. Расстояние между пружинами и от крайней пружины до груза одинаковы (см. рисунок). Деформации пружин очень малы по сравнению с их длиной,



а деформации стержня и потолка много меньше деформаций пружин. Найти силы упругости пружин. Ускорение свободного падения g.

Решение: Запишем условия равновесия сил, действующих на стержень, в проекции на вертикальную ось: $F_1+F_2+F_3=mg$ (силы упругости пружин $F_{1,2,3}$ считаем положительными для растянутой пружины). Добавим к ним правило моментов для стержня, записанное относительно «левого» (на рисунке) края стержня: $F_2\frac{L}{3}+F_3\frac{2L}{3}=mgL \Rightarrow F_2+2F_3=3mg$. Здесь мы воспользовались информацией из условия, согласно которой при длине стержня L расстояние между пружинами и от крайней пружины до груза равны по $\frac{L}{3}$. Теперь заметим, что, так как стержень и потолок остаются прямыми, то деформация второй пружины, расположенной точно посередине между первой и третьей, должна равняться полусумме их деформаций: $x_2 = \frac{x_1 + x_3}{2}$. Умножая это соотношение на одинаковый для всех пружин коэффициент жесткости k, получим третье уравнение относительно трех сил упругости: $2F_2 = F_1 + F_3$. Решая систему уравнений, находим, что: $F_1 = -\frac{2}{3}mg$, $F_2 = \frac{1}{3}mg$, $F_3 = \frac{4}{3}mg$. Как видно, крайняя «слева» пружина сжата, а две другие растянуты.

Ответ: $F_1 = -\frac{2}{3}mg$, $F_2 = \frac{1}{3}mg$, $F_3 = \frac{4}{3}mg$, то есть крайняя «слева» пружина сжата, а две другие растянуты.

Задание 2.

Вопрос: В замкнутом сосуде под поршнем находятся одинаковые массы воды и водяного пара в равновесии. Поршень плавно опускают, уменьшая объем сосуда вдвое. Температура поддерживается постоянной и равной $t = 50°C$. Во сколько раз после опускания поршня масса воды превышает массу водяного пара?

Ответ: При одинаковых массах объемом жидкой воды можно пренебрегать по сравнению с объемом пара. Поэтому можно считать, что в два раза уменьшился объем пара. Поскольку плотность насыщенного водяного пара при неизменной температуре не изменяется, то масса пара уменьшилась примерно в два раза за счет конденсации, а масса жидкой воды увеличилась на половину начальной массы. Таким образом, после опускания поршня масса воды превышает массу водяного пара в три раза.

Задача: В закрытом с обоих концов цилиндре объемом $V = 2$ л свободно ходит невесомый тонкий поршень. В пространстве с одной стороны поршня вводится $m_1 = 2$ г воды; с другой стороны поршня $m_2 = 1$г азота. Найти отношение объемов частей цилиндра при $t = 100°C$. Молярная масса воды $\mu_1 = 18$ г/моль, молярная масса азота $\mu_2 = 28$ г/моль. Универсальная газовая постоянная $R \approx 8{,}31$ Дж/моль·К.

Решение: Установившееся давление не может быть больше давления насыщенных паров воды, которое при температуре $t = 100°C$ равно нормальному атмосферному давлению p_0. Если вся вода находится в в цилиндре в виде пара, то должно быть $p < p_0$. Определим давление пара, предположив, что вся вода испарилась. С учетом условия равновесия поршня замечаем, что давления водяного пара и азота должны быть одинаковы. Из уравнений Менделеева-Клапейрона для пара и азота $pV_1 = \frac{m_1}{\mu_1}RT$ и $p(V - V_1) = \frac{m_2}{\mu_2}RT$ найдем: $p = \left(\frac{m_1}{\mu_1} + \frac{m_2}{\mu_2}\right)\frac{RT}{V} \approx 2{,}28 \cdot 10^5$ Па, что заведомо больше p_0. Значит, наше предположение неверно, и на самом деле часть воды (чуть больше половины) находится в жидком состоянии. Объем жидкой воды очень мал, и ее влиянием на поршень можно пренебречь. Давление пара равно p_0, и таким же будет давление азота. Значит,

$p_0(V-V_1)=\frac{m_2}{\mu_2}RT \Rightarrow \frac{V_1}{V}=1-\frac{m_2RT}{\mu_2 p_0 V}$, и $\frac{V_1}{V_2}=\frac{V_1}{V-V_1}=\frac{\mu_2 p_0 V}{m_2RT}-1\approx\frac{p_0}{0{,}554\cdot 10^5\,\text{Па}}-1$. Если использовать значение $p_0\approx 1{,}01\cdot 10^5$ Па, то получим, что $\frac{V_1}{V_2}\approx 0{,}82$.

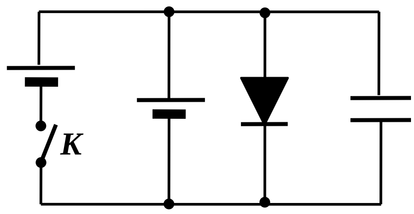
Ответ: $\frac{V_1}{V_2}=\frac{\mu_2 p_0 V}{m_2RT}-1\approx\frac{p_0}{0{,}554\cdot 10^5\,\text{Па}}-1$, где p_0 – нормальное атмосферное давление, то есть $\frac{V_1}{V_2}\approx 0{,}82$. Для участников допускалось использование более грубого численного значения p_0 (например, $p_0\approx 10^5$ Па – тогда $\frac{V_1}{V_2}\approx 0{,}81$).

Задание 3.

Вопрос: «Слабонеидеальный» диод открывается при напряжении, равном 1 В, и в открытом состоянии может пропустить любой ток без увеличения напряжения. Его подключают к источнику с ЭДС, равным 4 В. Чему будет равно отношение мощности тепловых потерь на диоде к мощности тепловых потерь на внутреннем сопротивлении источника? Сопротивлением соединительных проводов пренебречь.

Ответ: Ток через диод и через источник будет одинаков, поэтому отношение мощности тепловых потерь на диоде к мощности тепловых потерь на внутреннем сопротивлении источника равно отношению напряжений. Так как на диоде напряжение равно 1 В, то падение потенциала на внутреннем сопротивлении источника равно 3 В. Поэтому искомое отношение равно $\frac{1}{3}$.

Задача: В схеме, показанной на рисунке, оба источника одинаковы. Диод существенно отличается от идеального: его вольт-амперная характеристика (связь протекающего тока с напряжением) в открытом состоянии описывается выражением $I(U)=I_0\left(\frac{U}{\text{E}}\right)^2$, где I_0 – ток короткого замыкания каждого из источников, а Е – величина ЭДС.



Пока ключ К разомкнут, конденсатор заряжен до заряда q_1. Какой заряд будет на конденсаторе в установившемся режиме после замыкания ключа?

Решение: Рассмотрим сначала состояние схемы до замыкания ключа. Напряжение на конденсаторе U совпадает с напряжением на диоде и на ветви с источником. Согласно закону Ома для участка цепи с ЭДС ток в цепи определяется соотношением: $\text{E}-Ir=U$. С другой стороны, $r=\frac{E}{I_0}$, а ток связан с напряжением соотношением $I=I_0\left(\frac{U}{\text{E}}\right)^2$. Поэтому $\left(\frac{U}{\text{E}}\right)^2+\frac{U}{\text{E}}-1=0$, и, используя положительный корень этого уравнения, находим, что $U=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\text{E}$. Значит, $q_1=CU=\frac{\sqrt{5}-1}{2}C\text{E}$. После замыкания ключа образуется батарея из двух источников с той же ЭДС и внутренним сопротивлением $\frac{r}{2}=\frac{E}{2I_0}$. Повторяя вновь выкладки, получим новое уравнение для напряжения $\left(\frac{U'}{\mathrm{E}}\right)^2+2\frac{U'}{\mathrm{E}}-2=0$, откуда $U'=(\sqrt{3}-1)\mathrm{E}$. Следовательно, новый заряд на конденсаторе $q_2=CU'=(\sqrt{3}-1)C\mathrm{E}=\frac{2(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{5}-1}q_1\approx 1{,}18\,q_1$. Заряд конденсатора увеличился.

Ответ: $q_2=\frac{2(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{5}-1}q_1\approx 1{,}18\,q_1$.

Задание 4.

Вопрос: Поверхность водоема ровная, показатель преломления воды примерно равен 1,41. Каким может быть максимальный угол отклонения от вертикали световых лучей в воде, если небо затянуто облаками?

Ответ: При затянутом облаками небе освещение поверхности пруда рассеянное, то есть лучи света падают на поверхность воды под всеми возможными углами. Максимальный угол падения равен $90°$, и поэтому максимальный угол преломления (а это и есть искомый угол) определяется из закона Снела: $\sin(\beta_{\max})=\frac{1}{n}\sin(90°)=\frac{1}{1{,}41}\approx\frac{1}{\sqrt{2}}$ с ошибкой менее 0,5%. Значит, примерно с такой же точностью $\beta_{\max}\approx 45°$.

Задача: Вплотную к торцу прямого цилиндрического прозрачного стержня расположен маленький источник света, испускающего свет во всех направлениях. При какой минимальной величине показателя преломления материала стержня n все лучи, попавшие в стержень через торец вблизи источника света, достигнут его другого торца?

Решение: Так как максимальный угол падения лучей от источника на торец стержня $\alpha\approx\frac{\pi}{2}$, то преломленные лучи составляют с осью стержня углы, не превышающие $\beta=\arcsin\left(\frac{1}{n}\right)$. Поэтому минимальный угол падения лучей на боковую поверхность стержня равен $\frac{\pi}{2}-\beta$. Для того, чтобы все лучи, попавшие в стержень через торец от источника, достигли его другого торца, на боковой поверхности для всех лучей должно происходить полное внутреннее отражение. Таким образом, должно выполняться требование $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)\geq\frac{1}{n}\Rightarrow\cos(\beta)=\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}\geq\frac{1}{n}\Rightarrow n\geq\sqrt{2}\approx 1{,}41$.

Ответ: при $n\geq\sqrt{2}\approx 1{,}41$.

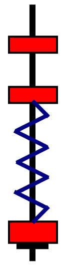
БИЛЕТ № 3 (УФА)

Задание 1.

Вопрос: Три одинаковых груза массы $m=100$ г связаны попарно (1-й со 2-м, 2-й с 3-м) двумя легкими нерастяжимыми нитями. Верхний груз поднимают вверх с ускорением $a=5$ м/с^2, два других поднимаются за ним. На сколько Ньютон различаются силы натяжения верхней и нижней нити? Ускорение свободного падения $g\approx 10$ м/с^2.

Ответ: Силы натяжения верхней и нижней нити и сила тяжести – это силы, действующие на второй груз, который движется вверх с таким же ускорением, что и первый. Уравнение движения этого груза $ma = T_1 - T_2 - mg$ позволяет найти искомую разность $T_1 - T_2 = m(g + a) = 1{,}5$ Н.

Задача: На гладком вертикальном стержне надеты три шайбы, которые при скольжении стержню остаются горизонтальными. Нижняя шайба с массой $2m$ покоится на жестком упоре, вторая – с массой m – покоится на невесомой длинной пружине жесткостью k, соединяющей ее с первой. Ось пружины совпадает с осью стержня. Третью шайбу, масса которой также равна m, сначала удерживают на некоторой высоте над второй, а затем аккуратно отпускают. При какой максимальной величине этой высоты вторая и третья шайба, мгновенно слипшиеся в результате неупругого соударения, будут совершать гармонические колебания? Ускорение свободного падения g.



Решение: Третья шайба после падения с высоты h упадет на вторую со скоростью $v = \sqrt{2gh}$. При «мгновенном» абсолютно неупругом соударении полный импульс mv сохраняется, и поэтому образовавшееся тело массы $2m$ начнет движение со скоростью $v_0 = \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{gh}{2}}$. Если в процессе движения верхние шайбы не будут отрываться друг от друга, а нижняя – от упора, то пара верхних шайб будет совершать гармонические колебания с частотой $\omega = \sqrt{\frac{k}{2m}}$. В состоянии покоя пружина была сжата одной шайбой на величину $\Delta l_1 = -\frac{mg}{k}$. Для «двойной» шайбы равновесная деформация должна составлять $\Delta l_2 = -\frac{2mg}{k}$, то есть отклонение от положения равновесия в момент старта составит $x_0 = -\frac{mg}{k}$ (ось x направлена вниз). Значит, амплитуда возникших гармонических колебаний должна равняться $x_m = \sqrt{x_0^2 + \frac{2m}{k} v_0^2} = \sqrt{\frac{m^2 g^2}{k^2} + \frac{mgh}{k}}$. Итак, максимальное растяжение пружины может равняться $\sqrt{\frac{m^2 g^2}{k^2} + \frac{mgh}{k}} - \frac{2mg}{k}$, и нижняя шайба не отрывается от упора, если сила упругости растянутой пружины не превышает ее веса: $\sqrt{\frac{m^2 g^2}{k^2} + \frac{mgh}{k}} - \frac{2mg}{k} \le \frac{2mg}{k}$. Из этого ограничения видно, что $h \le 15\frac{mg}{k}$. Так как шайбы по условию «слиплись», то следует считать, что далее они не будут отрываться друг от друга из-за возникших сил сцепления. С другой стороны, если участник предполагал силы сцепления малыми, то тогда следовало записать условие отрыва. Оно должно состоять в том, что верхней шайбе не придется опускаться с ускорением больше g (если силы сцепления пренебрежимо малы, то только сила тяжести может сообщить ей ускорение, направленное вниз). Амплитуда ускорения $a_m = \omega^2 x_m$, и поэтому это условие выполняется при $\frac{k}{2m}\sqrt{\frac{m^2 g^2}{k^2} + \frac{mgh}{k}} \le g$, откуда $h \le 3\frac{mg}{k}$.

В этом случае именно такое ограничение дает ответ на вопрос задачи.

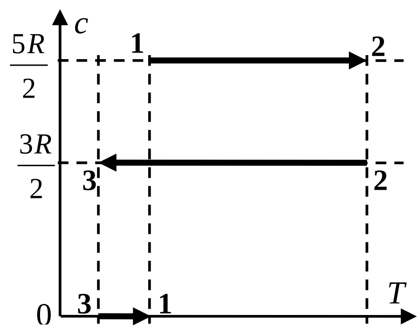
Ответ: при $h \le 15\dfrac{mg}{k}$, если силы сцепления шайб достаточны для удержания их вместе в процессе движения (допустимый вариант – при $h \le 3\dfrac{mg}{k}$, если силы сцепления шайб предполагаются малыми).

Задание 2.

Вопрос: Найдите разницу молярных теплоемкостей идеального газа в изобарном и изохорном процессах.

Ответ: При изохорном процессе количество теплоты, сообщаемое молю идеального газа, идет только на увеличение его внутренней энергии, которая пропорциональна абсолютной температуре газа: $Q_V = \Delta U = c_V \Delta T$. При изобарном – на такое же увеличение внутренней энергии и совершаемую газом работу $A = p\Delta V = \Delta(pV) = R\Delta T$. Таким образом, $Q_p = c_p \Delta T = \Delta U + A = c_V \Delta T + R\Delta T$. Значит, $c_p - c_V = R$.

Задача: Рабочим телом тепловой машины является 1 моль одноатомного идеального газа, совершающий циклический процесс, диаграмма которого в координатах «теплоемкость – температура» показана на рисунке. Известно, что максимальная абсолютная температура газа в цикле больше минимальной в $n = 4\sqrt{2}$ раз. Найти КПД цикла. Уравнение адиабаты для одноатомного идеального газа $pV^{5/3} = const$.



Решение: Как видно по значениям теплоемкости, цикл состоит из изобары (1-2), изохоры (2-3) и адиабаты (3-1). Теплота нагревателя $Q_H = Q_{12} = \dfrac{5}{2}R(T_2 - T_1)$, а теплота холодильника $Q_X = -Q_{23} = \dfrac{3}{2}R(T_2 - T_3)$. Поэтому КПД цикла $\eta = 1 - \dfrac{Q_X}{Q_H} = 1 - \dfrac{3(T_2 - T_3)}{5(T_2 - T_1)}$. По условию $T_2 = nT_3$. Так как процесс 3-1 – это адиабата, то $p_1V_1^{5/3} = p_3V_3^{5/3}$. Из уравнения Менделеева-Клапейрона следует, что $p_1V_1 = RT_1$ и $p_3V_3 = RT_3$. Значит, $T_1V_1^{2/3} = T_3V_3^{2/3}$. Но $V_3 = V_2$, и поэтому $\dfrac{V_3}{V_1} = \dfrac{V_2}{V_1} = \dfrac{T_2}{T_1}$ (1-2 – изобара!). Мы приходит к соотношению $T_2 \cdot T_1^{3/2} = T_3^{5/2} \Rightarrow T_1 = n^{2/5}T_3$. Выражая в формуле для КПД все температуры через T_3, получаем: $\eta = 1 - \dfrac{3(n-1)}{5(n - n^{2/5})} = \dfrac{8\sqrt{2} - 7}{10(2\sqrt{2} - 1)} \approx 0{,}24$.

Ответ: $\eta = 1 - \dfrac{3(n-1)}{5(n - n^{2/5})} = \dfrac{8\sqrt{2} - 7}{10(2\sqrt{2} - 1)} \approx 24\%$.

Задание 3.

Вопрос: Справедлив ли для нити лампы накаливания закон Ома? Ответ объясните.

Ответ: Нить лампы накаливания отличается от обычного проводника тем, что в рабочем режиме она очень существенно разогревается. При увеличении напряжения на нити лампы накаливания увеличивается ток, и увеличивается мощность тепловыделения $P = UI$. Поэтому увеличивается равновесная температура нити, а с ней – и сопротивление нити.

Поэтому ток через нить будет расти не прямо пропорционально напряжению, а медленнее – нелинейным образом. Значит, закон Ома для нити лампы накаливания в обычном смысле неприменим. Можно использовать закон Ома в форме $U = R(I) \cdot I$.

Задача: При измерении сопротивления вольфрамовой нити лампочки в «холодном» режиме (при температуре около 0^0С) оно оказалось равным $R_0 = 34$ Ом. В «рабочем» режиме лампочку подключают к аккумулятору с ЭДС $\mathcal{E} = 100$ В и внутренним сопротивлением $r = 19$ Ом, и при этом она потребляет мощность $N = 25$ Вт. Найти температуру нити лампочки в «рабочем» режиме. Температурный коэффициент сопротивления вольфрама $\alpha \approx 4{,}1 \cdot 10^{-3}$ К$^{-1}$, изменением отношения длины нити к площади ее сечения вследствие теплового расширения вольфрама можно пренебречь.

Решение: В соответствии с условием задачи, изменение сопротивления нити лампы в зависимости от температуры t описывается выражением $R = R_0(1+\alpha t)$. Ток через лампу в рабочем режиме $I = \dfrac{\mathcal{E}}{R+r}$, а потребляемая мощность $N = \dfrac{R\mathcal{E}^2}{(R+r)^2}$. Из этого соотношения находим сопротивление нити лампы в рабочем режиме:

$$R^2 + \left(2r - \frac{\mathcal{E}^2}{N}\right)R + r^2 = 0 \Rightarrow R = \frac{\mathcal{E}^2}{2N} - r + \sqrt{\left(\frac{\mathcal{E}^2}{4N} - r\right)\frac{\mathcal{E}^2}{N}}.$$

Выбран больший из двух корней полученного квадратного уравнения, так как меньший не удовлетворяет очевидному требованию $R > R_0$. Теперь можно выразить температуру нити через найденное сопротивление: $t = \dfrac{1}{\alpha}\left(\dfrac{R}{R_0} - 1\right) \approx 2400\,°C$.

Ответ: $t = \dfrac{1}{\alpha}\left\{\dfrac{\mathcal{E}^2}{2NR_0} - \dfrac{r}{R_0} - 1 + \sqrt{\left(\dfrac{\mathcal{E}^2}{4NR_0} - \dfrac{r}{R_0}\right)\dfrac{\mathcal{E}^2}{NR_0}}\right\} \approx 2400\,°C$.

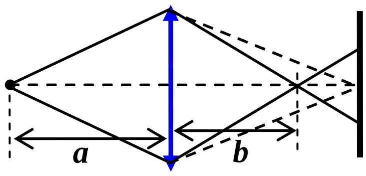
Задание 4.

Вопрос: При каких условиях линзу можно считать тонкой?

Ответ: При выводе формулы тонкой линзы пренебрегают ее толщиной и заменяют синусы и тангенсы углов падения и преломления на их величину в радианной мере. Для корректности таких действий толщина линзы должна быть малой по сравнению с размерами линзы, а углы падения и преломления должны быть малыми (должно работать параксиальное приближение). Так как линза ограничена сферическими поверхностями, то условие малой толщины линзы можно также сформулировать как условие малости диаметра линзы по сравнению с радиусами кривизны ее сферических поверхностей.

Задача: В тонкой непрозрачной ширме есть круглое отверстие, в которое плотно вставлена тонкая линза (радиус линзы совпадает с радиусом отверстия). По одну сторону от линзы на расстоянии $L = 40$ см от нее помещен экран, плоскость которого параллельна плоскости линзы. По другую сторону от линзы на ее оптической оси располагают точечный источник света – таким образом, чтобы на экране наблюдалось его четкое изображение. Когда к этой линзе плотно прижали вторую тонкую линзу, радиус которой чуть больше радиуса первой, на экране образовалось светлое пятно с радиусом в $n = 2$ раза меньше радиуса отверстия в ширме. Найти оптическую силу второй линзы. Известно, что вторая линза – собирающая.

Решение: Поскольку первая линза создает изображение источника на экране (то есть это действительное изображение), то первая линза тоже является собирающей. Если ее оптическую силу обозначить D_1, а расстояние от источника до линзы – a, то, согласно формуле линзы, $D_1 = \frac{1}{a} + \frac{1}{L}$. При тесном прижатии двух тонких линз их оптические силы складываются. Поэтому оптическая сила составной линзы – это $D_1 + D_2 > D_1$. Так как оптическая сила линзы увеличилась, то точка пересечения преломленных лучей приблизится к линзе – картина хода лучей изображена на рисунке. Значит, расстояние до нового изображения



определяется из соотношения подобия треугольников: $b + \frac{b}{n} = L \Rightarrow b = \frac{n}{n+1} L$. Новая запись формулы линзы $D_1 + D_2 = \frac{1}{a} + \frac{n+1}{nL}$. Вычитая из нее предыдущую, находим, что

$D_2 = \frac{1}{nL} = +1{,}25$ Дптр.

Ответ: $D_2 = \frac{1}{nL} = +1{,}25$ Дптр.

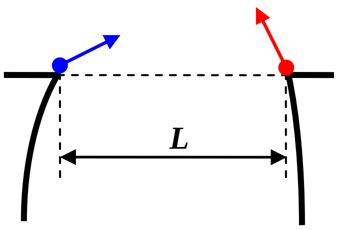
БИЛЕТ №4 (ЕКАТЕРИНБУРГ)

Задание 1.

Вопрос: Тяжелую гирю отпускают без начальной скорости с некоторой высоты. Одновременно с земли брошен камешек. Куда в начальный момент должна быть направлена скорость камня (если она достаточна по величине), чтобы камень попал в гирю во время падения? Сопротивление воздуха отсутствует.

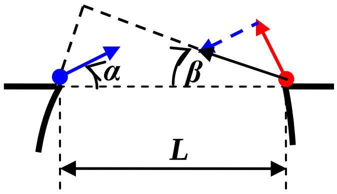
Ответ: Перейдем в систему отсчета, связанную с гирей. В этой системе отсчета ускорение камня в точности равно нулю (в отсутствие сопротивления воздуха в системе отсчета, связанной с Землей, все тела движутся с ускорением свободного падения). Таким образом, камень движется относительно гири по прямой, и для попадания в начальный момент времени скорость камня должна быть направлена точно на гирю. Вернемся в систему отсчета, связанную с Землей. В начальный момент времени скорость гири равна нулю, и скорость камня относительно нее равна его скорости относительно Земли. Значит, и в этой системе отсчета скорость камня должна быть направлена точно на гирю.

Задача: С двух сторон оврага шириной $L = 20$ м одновременно брошены два небольших камня. Начальные скорости камней одинаковы и направлены перпендикулярно друг другу, точки бросания находятся на одной горизонтали. Оказалось, что скорости камней вновь оказались перпендикулярны друг другу точно в тот момент времени, когда расстояние между ними было минимально. Найти величину начальной скорости камней. Ускорение



свободного падения $g \approx 10$ м/с^2, сопротивлением воздуха пренебречь.

Решение: Пусть $\vec{v}_{1,2}$ – начальные скорости камней ($|\vec{v}_1| = |\vec{v}_2| \equiv v$), и при этом скорость первого камня направлена под углом α к горизонту. Тогда закон изменения скорости камней $\vec{v}_{1,2}(t) = \vec{v}_{1,2} + \vec{g}t$. В указанном в условии момент времени скорости камней перпендикулярны, то есть $\vec{v}_1(t)\cdot\vec{v}_2(t)=0$. Поскольку и $\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2=0$, то из этих соотношений следует, что $\vec{v}_1\cdot\vec{g}+\vec{v}_2\cdot\vec{g}t+g^2t^2=0 \Rightarrow t=\dfrac{v[\cos(\alpha)+\sin(\alpha)]}{g}$. Перейдем теперь в систему



отсчета, связанную с первым камнем. В этой системе отсчета второй камень движется по прямой с постоянной скоростью. Эта скорость равна векторной разности начальных скоростей камней: $\vec{v}_2'=\vec{v}_2-\vec{v}_1$. Так как этот треугольник векторов скоростей равнобедренный и прямоугольный, то можно заключить, что относительно первого камня второй движется

по прямой, направленной под углом $\beta=\dfrac{\pi}{4}-\alpha$ к линии, соединяющей начальные положения камней, со скоростью $v'=v\sqrt{2}$. Значит, то точки максимального сближения второй камень будет двигаться в течении времени $t=\dfrac{L\cos(\beta)}{v'}=\dfrac{L[\cos(\alpha)+\sin(\alpha)]}{2v}$. Поскольку это тоже самое время, что и время движения до точки перпендикулярности скоростей, то $\dfrac{v[\cos(\alpha)+\sin(\alpha)]}{g}=\dfrac{L[\cos(\alpha)+\sin(\alpha)]}{2v} \Rightarrow v=\sqrt{\dfrac{gL}{2}}=10$ м/с.

Ответ: $v=\sqrt{\dfrac{gL}{2}}=10$ м/с.

Задание 2.

Вопрос: Холодильная установка передает тепло от «холодильника» к «радиатору» за счет совершения работы над рабочим телом. Эффективность ее действия описывают «холодильным коэффициентом» $k\equiv\dfrac{Q_X}{A}$. Может ли k быть больше 100%?

Ответ: Может. В соответствии с законом сохранения энергии, для холодильной установки $Q_H=Q_X+A \Rightarrow A=Q_H-Q_X$. Поэтому $k=\dfrac{Q_X}{Q_H-Q_X}$, и при $Q_H<2Q_X$ получается $k>100\%$.

Задача: В морозильной камере поддерживается постоянная температура $t_1=-18°C$, а радиатор холодильника при этом имеет температуру $t_2=+33°C$. Известно, что рабочее тело холодильной установки совершает цикл Карно (составленный из двух изотерм и двух адиабат), а его сжатие обеспечивается электродвигателем, который потребляет мощность $P=20$ Вт. КПД электродвигателя (с учетом всех потерь) $\eta_M=30\%$. Какое количество тепла поступает в морозильную камеру от внешней среды за время $\tau=1$ мин в этом режиме?

Решение: КПД цикла Карно $\eta=\dfrac{A}{Q_H}=1-\dfrac{T_X}{T_H}$ (здесь T_H – это температура радиатора, которому отдается тепло). Следовательно, $A=\dfrac{T_H-T_X}{T_H}(A+Q_X)$, откуда $Q_X=\dfrac{T_X}{T_H-T_X}A$.

Работа мотора за указанное время $A=\eta_M P\tau$, а количество тепла, которое поступает в морозильную камеру от внешней среды в установившемся режиме в точности равно количеству тепла, отведенному холодильной установкой, то есть Q_X. Итак,

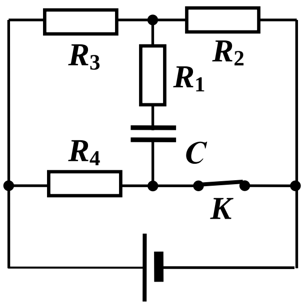
$Q_X = \dfrac{T_X}{T_H - T_X}\eta_M P\tau = 1800$ Дж. Можно отметить, что холодильный коэффициент установки из условия явно больше 100%: $k = \dfrac{T_X}{T_H - T_X} = 500\%$.

Ответ: $Q_X = \dfrac{T_X}{T_H - T_X}\eta_M P\tau = 1800$ Дж.

Задание 3.

Вопрос: Обкладки конденсатора одинаковы и расположены симметрично относительно некоторой плоскости. Емкость конденсатора $C = 1$ мкФ. На одну обкладку нанесен заряд $q_1 = +3$ мкКл, на другую – $q_2 = +2$ мкКл. Чему равна разность потенциалов между обкладками?

Ответ: Поле между обкладками конденсатора в данном случае равно разности полей пластин, поэтому $U = \dfrac{q_1 - q_2}{2\varepsilon_0 S}d = \dfrac{q_1 - q_2}{2C} = 0{,}5$ В.



Задача: Определите заряд, который пройдет через сопротивление R_1 после размыкания ключа К. ЭДС источника $\mathcal{E} = 125$ В, его внутреннее сопротивление $r = 10$ Ом, величины всех сопротивлений равны $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = 20$ Ом, $C = 20$ мкФ.

Решение: Так как через конденсатор постоянный ток не течет, то при замкнутом ключе К разность потенциалов на обкладках конденсатора равна напряжению U_2 на сопротивлении R_2. Так как R_2 и R_3 соединены между собой последовательно и оба они параллельны R_4, то ток в ветви с источником $I = \dfrac{\mathcal{E}(R_2 + R_3 + R_4)}{R_4(R_2 + R_3) + r(R_2 + R_3 + R_4)}$. Ток через сопротивление R_2 равен $I_2 = \dfrac{R_4}{R_2 + R_3 + R_4} I = \dfrac{\mathcal{E}R_4}{R_4(R_2 + R_3) + r(R_2 + R_3 + R_4)}$, и напряжение на нем $U_2 = R_2 I_2 = \dfrac{\mathcal{E}R_4 R_2}{R_4(R_2 + R_3) + r(R_2 + R_3 + R_4)}$. Следовательно, заряд на конденсаторе при замкнутом ключе $q = CU_2 = C\dfrac{\mathcal{E}R_4 R_2}{R_4(R_2 + R_3) + r(R_2 + R_3 + R_4)}$. После размыкания ключа К разность потенциалов на обкладках конденсатора будет равна напряжению U_3 на сопротивлении R_3. В этом случае сила тока через R_3 равна $I' = \dfrac{\mathcal{E}}{r + R_2 + R_3}$, и напряжение на нем $U_3 = R_3 I' = R_3\dfrac{\mathcal{E}}{r + R_2 + R_3}$. Значит, заряд на конденсаторе $q' = CU_3 = CR_3\dfrac{\mathcal{E}}{r + R_2 + R_3}$.

При размыкании ключа происходит перезарядка конденсатора – пластина, подключенная к положительному полюсу источника, оказывается подключенной к его отрицательному полюсу, то заряд, проходящий через сопротивление R_1, соединенное последовательно с конденсатором, будет равен сумме этих зарядов, т.е. $\Delta q = q + q' = C\mathcal{E}\left\{\dfrac{R_4 R_2}{R_4(R_2 + R_3) + r(R_2 + R_3 + R_4)} + \dfrac{R_3}{r + R_2 + R_3}\right\} \approx 1{,}7$ мКл.

Ответ: $\Delta q = q + q' = C\mathcal{E}\left\{\frac{R_4R_2}{R_4(R_2+R_3)+r(R_2+R_3+R_4)}+\frac{R_3}{r+R_2+R_3}\right\} \approx 1{,}7$ мКл.

Задание 4.

Вопрос: От чего зависит оптическая сила тонкой линзы?

Ответ: Оптическая сила D тонкой линзы зависит от показателя преломления вещества линзы (относительно окружающей среды) – чем больше этот показатель, тем больше абсолютная величина оптической силы. Кроме того, оптическая сила тонкой линзы зависит от радиусов кривизны ее сферических поверхностей – чем больше радиусы кривизны, тем меньше оптическая сила. Знак оптической силы (т.е. тот факт, что линза является собирающей или рассеивающей), зависит от типа линзы: если обе сферические поверхности выпуклые или радиус кривизны выпуклой поверхности меньше радиуса кривизны вогнутой, то $D > 0$ (линза собирающая), если обе сферические поверхности вогнутые или радиус кривизны выпуклой поверхности больше радиуса кривизны вогнутой, то $D < 0$ (линза рассеивающая).

Задача: На главной оптической оси линзы расположены два точечных источника света на расстоянии $L = 25$ см друг от друга. Линза с фокусным расстоянием $F = 10$ см находится между источниками. На каких расстояниях от каждого из источников находится линза, если изображения обоих источников оказались в одной точке?

Решение: Обозначим расстояния от линзы до первого источника и его изображения a_1 и b_1, а до второго – a_2 и b_2 соответственно. Ясно, что одно из изображений будет мнимым (источники находятся по разные стороны от линзы, а изображения – по одну сторону). Пусть мнимым является изображение от источника 2. Запишем формулу линзы для каждого источника. $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{b_1}=\frac{1}{F}$ и $\frac{1}{a_2}-\frac{1}{b_1}=\frac{1}{F}$ (ведь $b_2 = -b_1$). По условию, $a_1 + a_2 = L$. Выражаем из этого соотношения a_2 и подставляем его во второе уравнение, а затем складываем уравнения почленно. Получаем уравнение относительно a_1: $a_1^2 - La_1 + \frac{LF}{2} = 0$. Два его корня как раз отвечают расстояниям от линзы до источников: $a_1 = \frac{L+\sqrt{L^2-2LF}}{2} \approx 18$ см и $a_2 = \frac{L-\sqrt{L^2-2LF}}{2} \approx 7$ см.

Ответ: Линза находится на расстоянии $a_1 = \frac{L+\sqrt{L^2-2LF}}{2} \approx 18$ см от одного источника и на расстоянии $a_2 = \frac{L-\sqrt{L^2-2LF}}{2} \approx 7$ см от другого.

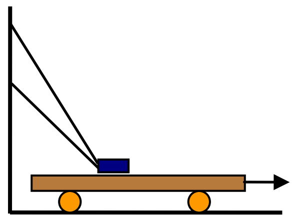
БИЛЕТ № 5 (МОСКВА)

Задание 1.

Вопрос: Два отрезка лески изготовлены из одинакового материала. При этом диаметр первой лески в два раза меньше, чем у второй, а длина – в два раза больше. Под весом прикрепленного к концу лески груза первая леска растянулась на 4 мм (что значительно меньше ее длины). Какой будет величина деформации второй лески, если на ней подвесить тот же груз?

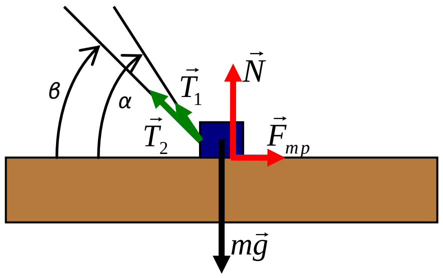
Ответ: Так как величина деформации x значительно меньше длины лески, то можно считать, что сила упругости подчиняется закону Гука: $mg = k_1 x_1 = k_2 x_2$. Коэффициенты жесткости для первой и второй лески определяются соотношениями $k = E\dfrac{S}{L}$ (где E - модуль Юнга материала), поэтому $k_2 = 8k_1$. Следовательно, $x_2 = \dfrac{x_1}{8} = 0{,}5$ мм.

Задача: Небольшой груз массы m лежит неподвижно на горизонтальной платформе, которую вытягивают из-под него. Его удерживают на месте два отрезка одной легкой нерастяжимой нити (см. рисунок). Найти силы натяжения обоих отрезков. Вторые концы отрезков нити закреплены на стене таким образом, что при нахождении груза на платформе они натягиваются одновременно, составляя при этом с горизонталью углы 60° и 45°. Коэффициент трения между грузом и



платформой $\mu = 0{,}5$. Ускорение свободного падения g.

Решение: Изобразим силы, действующие на груз. Условия равновесия сил дают нам два



уравнения

$$\begin{cases} T_1\cos\alpha + T_2\cos\beta - \mu N = 0 \\ T_1\sin\alpha + T_2\sin\beta + N = mg \end{cases}$$

для трех неизвестных сил реакции. Правило моментов здесь не поможет (оно определяет точку приложения равнодействующей сил нормальной реакции, к тому же нам не описана форма груза – только указано, что он неподвижен). Поэтому нам необходимо исследовать распределение нагрузки между силами натяжения нитей. Так как эти нити различаются только длиной, то соотношение их коэффициентов жесткости определено: $T = k\cdot\Delta l,\quad k = E\dfrac{S}{l} \Rightarrow \dfrac{k_2}{k_1} = \dfrac{l_1}{l_2} = \dfrac{\cos\beta}{\cos\alpha}$ (здесь учтено, что длины нитей связаны с расстоянием от стенки до груза x соотношениями $l_1 = \dfrac{x}{\cos\alpha}$, $l_2 = \dfrac{x}{\cos\beta}$). Рассмотрим бесконечно малый сдвиг груза от стены dx. При этом удлинение первой нити $dl_1 = d(\sqrt{h_1^2 + x^2}) = \dfrac{x}{\sqrt{h_1^2 + x^2}}dx = \cos\alpha\cdot dx$ и аналогично $dl_2 = \cos\beta\cdot dx$. Значит, $\dfrac{T_2}{T_1} = \dfrac{k_2}{k_1}\dfrac{dl_2}{dl_1} = \left(\dfrac{\cos\beta}{\cos\alpha}\right)^2 = 2$. Итак, мы получили связь между силами натяжения нитей. Теперь мы можем решить систему уравнений:

$$\left\{\begin{array}{l} T_1\left(\dfrac{1}{2} + 2\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \mu N \\ T_1\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + 2\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) + N = mg \end{array}\right\} \Rightarrow T_1 = \frac{2\sqrt{2}\,\mu mg}{4+\sqrt{2}+\mu(4+\sqrt{6})} = \frac{2mg}{2+\sqrt{3}+6\sqrt{2}}.$$

При этом, естественно, $T_2 = \dfrac{4\sqrt{2}\,\mu mg}{4+\sqrt{2}+\mu(4+\sqrt{6})} = \dfrac{4mg}{2+\sqrt{3}+6\sqrt{2}}$.

Ответ: $T_1 = \dfrac{2mg}{2+\sqrt{3}+6\sqrt{2}}$, $T_2 = \dfrac{4mg}{2+\sqrt{3}+6\sqrt{2}}$.

Задание 2.

Вопрос: При каких условиях для некоторого газа можно использовать уравнение Менделеева-Клапейрона?

Ответ: Уравнение Менделеева-Клапейрона может быть выведено из модели идеального газа, поэтому оно может быть использовано для газов, отличием которых от идеального газа можно пренебречь. Для этого необходимо, чтобы среднее расстояние между молекулами газа было значительно больше их размеров, и чтобы величина средней потенциальной энергии взаимодействия молекул была много меньше средней кинетической энергии молекулы.

Задача: В вертикальном гладком цилиндре с площадью сечения $S = 4\,\text{см}^2$ под поршнем массой $m = 800$ г находится газ. При увеличении абсолютной температуры газа в $n = 1{,}5$ раза поршень поднимается вверх и упирается в уступы. При этом объем газа по сравнению с первоначальным увеличивается в $k = 1{,}2$ раза. Определить силу, с которой поршень давит на уступы. Атмосферное давление $p_0 \approx 100$ кПа, ускорение свободного падения $g \approx 10$ м/с^2.

Решение: Так как количество газа не изменяется, то параметры его состояния до и после нагрева связаны соотношением $\dfrac{P_1V_1}{T_1} = \dfrac{P_2V_2}{T_2}$, то есть давление в цилиндре после нагрева равно $P_2 = \dfrac{P_1V_1T_2}{V_2T_1} = P_1\dfrac{n}{k}$. С другой стороны, $P_1 = p_0 + \dfrac{Mg}{S}$, а $P_2 = p_0 + \dfrac{F}{S} + \dfrac{Mg}{S}$. Следовательно, $p_0 + \dfrac{F}{S} + \dfrac{Mg}{S} = (p_0 + \dfrac{Mg}{S})\dfrac{n}{k}$, откуда $F = \left(\dfrac{n}{k} - 1\right)(p_0S + Mg) \approx 12$ Н.

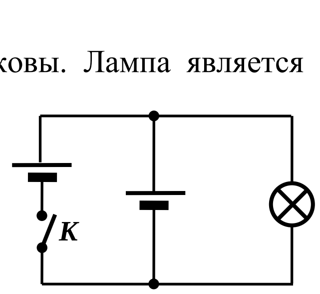
Ответ: $F = \left(\dfrac{n}{k} - 1\right)(p_0S + Mg) \approx 12$ Н.

Задание 3.

Вопрос: Как вычисляется мощность, потребляемая нелинейным элементом цепи постоянного тока (то есть элементом, для которого не выполняется закон Ома)?

Ответ: Мощность, потребляемая любым элементом цепи постоянного тока равна мощности работы электростатических сил по перемещению заряда через этот элемент, то есть рана произведению напряжения на этом элементе на протекающий через него ток: $P = U \cdot I$. Если для этого элемента $I = f(U)$, то $P = U \cdot f(U)$.

Задача: В схеме, показанной на рисунке, оба источника одинаковы. Лампа является нелинейным элементом: ее вольт-амперная характеристика (связь протекающего тока с напряжением) описывается выражением $I(U) = \dfrac{2}{r}\sqrt{\dfrac{\mathrm{E}U}{3}}$, где r – внутреннее сопротивление, а Е – величина ЭДС каждого источника. Пока ключ К разомкнут, лампа



потребляет мощность $P_1 = 6$ Вт. Какой станет потребляемая лампой мощность после замыкания ключа?

Решение: При разомкнутом ключе напряжение на ветви с источником, в которой течет ток I, то есть $U = \mathrm{E} - rI$ равно напряжению на лампе, в которой течет такой же ток: $U = \dfrac{3r^2I^2}{4\mathrm{E}}$.

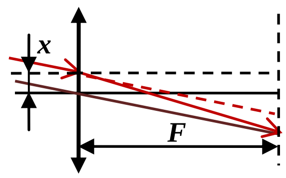
Поэтому ток через лампу удовлетворяет уравнению $r^2I^2+\frac{4}{3}\mathrm{E}rI-\frac{4}{3}\mathrm{E}^2=0$, положительный корень которого $I=\frac{2\mathrm{E}}{3r}$. Соответствующее напряжение $U=\frac{1}{3}\mathrm{E}$, поэтому $P=UI=\frac{2\mathrm{E}^2}{9r}$. После замыкания ключа батарея источников имеет то же ЭДС, и внутреннее сопротивление $\frac{r}{2}$. Значит, теперь $\mathrm{E}-\frac{r}{2}I=\frac{3r^2I^2}{4\mathrm{E}}$, и новое уравнение для силы тока через лампу $r^2I^2+\frac{2}{3}\mathrm{E}rI-\frac{4}{3}\mathrm{E}^2=0$. Теперь $I=\frac{(\sqrt{13}-1)\mathrm{E}}{3r}$, $U=\frac{(\sqrt{13}-1)^2}{12}\mathrm{E}$ и поэтому $P'=\frac{(\sqrt{13}-1)^3\mathrm{E}^2}{36r}=\frac{(\sqrt{13}-1)^3}{8}P=(2\sqrt{13}-5)P\approx 13{,}3\,\text{Вт}$.

Ответ: $P'=(2\sqrt{13}-5)P\approx 13{,}3\,\text{Вт}$.

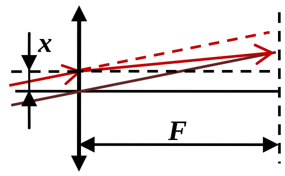
Задание 4.

Вопрос: Луч света падает на тонкую собирающую линзу под углом 0,1 рад к главной оптической оси в точке, находящейся на расстоянии $x=0{,}05F$ от этой оси (F - фокусное расстояние). Под каким углом к оси пойдет преломленный луч?

Ответ: Для построения преломленного луча можно построить луч, параллельный данному,



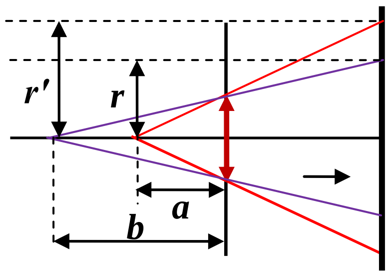
проходящий через оптический центр линзы без преломления. Эти лучи должны попасть в одну точку в фокальной плоскости. Следует заметить, что данные вопроса могут отвечать двум возможным ситуациям,



показанным на рисунках справа и слева. Как видно из построения, если падающий луч идет под углом α к оси, то преломленный луч идет к оси под углом β, для которого $tg(\beta)=tg(\alpha)\pm\frac{x}{F}$. Поскольку все углы – малые, то это равенство можно переписать для самих углов в радианной мере, то есть $\beta\approx\alpha\pm\frac{x}{F}=0{,}15$ рад, $0{,}05$ рад.

Задача: В отверстие радиусом $R=2\,\text{см}$ в тонкой непрозрачной перегородке вставлена собирающая линза. Точечный источник света расположен на главной оптической оси линзы. По другую сторону относительно перегородки находится экран. Экран, соприкасающийся вначале с линзой, отодвигают от линзы. При этом радиус светлого пятна на экране плавно увеличивается и на расстоянии $L=18\,\text{см}$ от перегородки достигает значения $r=3\,\text{см}$. Если линзу убрать, оставив экран на месте, то радиус пятна на экране станет $r'=4\,\text{см}$. Определите фокусное расстояние линзы.

Решение: В соответствии с условием, преломленные в линзе лучи расходятся, то есть



изображение источника мнимое (см. рис.) Пусть a – расстояние от источника до линзы, b – расстояние от мнимого изображения до линзы (по модулю). Из подобных треугольников имеем:

$$\frac{r}{R}=\frac{L+b}{b}\Rightarrow b=\frac{LR}{r-R},\qquad \frac{r'}{R}=\frac{L+a}{a}\Rightarrow a=\frac{LR}{r'-R}.$$

Фокусное расстояние найдем из формулы тонкой линзы: $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{1}{F}\Rightarrow F=\frac{LR}{r'-r}=36$ см.

Ответ: $F=\frac{LR}{r'-r}=36$ см.

БИЛЕТ № 6 (МОСКВА)

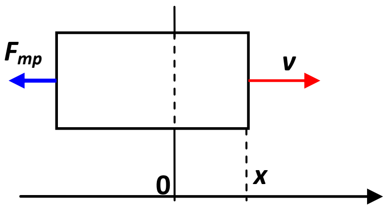
Задание 1.

Вопрос: Груз, подвешенный на пружине, находится в состоянии равновесия, и при этом удлинение пружины равно $\Delta l = 2{,}5$ см. Груз слегка подталкивают вертикально вверх. Какое время спустя он впервые вернется в исходное положение? Сопротивления воздуха нет, ускорение свободного падения $g \approx 10$ м/с^2.

Ответ: Удлинение пружины в состоянии равновесия связано с массой груза m соотношением $\Delta l=\frac{mg}{k}$. При выводе из состояния равновесия груз начнет совершать гармонические колебания с периодом $T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}=2\pi\sqrt{\frac{\Delta l}{g}}$. В исходное положение он впервые вернется после половины периода колебаний, то есть $t=\frac{T}{2}=\pi\sqrt{\frac{\Delta l}{g}}\approx 0{,}157$ с.

Задача: Однородный прямоугольный брусок скользит со скоростью v_0, направленной вдоль его более длинных сторон (длиной L), по гладкой горизонтальной поверхности. В некоторый момент времени он встречает границу очень обширной шероховатой области, перпендикулярную направлению его движения. За какое время после этого он остановится? Считать, что сила трения для части бруска пропорциональна площади этой части. Известно, что если скорость v_0 сообщить бруску, покоящемуся внутри шероховатой области, то он остановится за время $\tau=\frac{2L}{v_0}=1$с.

Решение: Знание времени торможения бруска на шероховатой горизонтальной поверхности позволяет определить коэффициент трения μ: поскольку сила трения сообщает бруску ускорение, равное по модулю μg и направленной против скорости, то $\tau=\frac{v_0}{\mu g} \quad\Rightarrow\quad \mu=\frac{v_0}{g\tau}$. Запишем теперь уравнение движения бруска массой m в процессе пересечения границы шероховатой области: $ma_x=F_{трx}=-\mu m g\frac{x}{L} \quad\Rightarrow\quad x_t''+\frac{v_0}{\tau L}x=0$.



Как видно, брусок будет двигаться по гармоническому закону $x(t)=A\cos(\omega_0 t)+B\sin(\omega_0 t)$, где $\omega_0\equiv\sqrt{\frac{v_0}{\tau L}}$. С учетом начальных условий $x(0)=0,\ x_t'(0)=v_0$, получаем закон движения переднего края бруска

$$\left.\begin{array}{c} A=0 \\ B=\frac{v_0}{\omega_0}=\sqrt{\tau L v_0} \end{array}\right\} \quad\Rightarrow\quad x(t)=\sqrt{\tau L v_0}\cdot\sin(\omega_0 t)$$

и закон изменения скорости бруска $v_x(t) = x'_t = v_0\cos(\omega_0 t)$. Поскольку у нас $\sqrt{L\tau v_0} > L \quad \Leftrightarrow \quad \tau > \frac{L}{v_0}$, то брусок полностью пересечет границу за время t_1, определяемое из соотношения $x(t_1) = \sqrt{\tau L v_0}\cdot\sin(\omega_0 t_1) = L \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{\tau L}{v_0}}\cdot\arcsin\left(\sqrt{\frac{L}{\tau v_0}}\right)$, и его скорость в этот момент времени будет равна $v_1 = v_0\cos(\omega_0 t_1) = v_0\sqrt{1-\frac{L}{\tau v_0}}$. Далее брусок тормозится с постоянным ускорением, и его скорость уменьшается до нуля за время $t_2 = \frac{v_1}{\mu g} = \frac{\tau v_0}{v_0}\sqrt{1-\frac{L}{\tau v_0}} = \sqrt{\tau\left(\tau - \frac{L}{v_0}\right)}$. В результате полное время торможения

$$\tilde{\tau} = t_1 + t_2 = \sqrt{\frac{\tau L}{v_0}}\cdot\arcsin\left(\sqrt{\frac{L}{\tau v_0}}\right) + \sqrt{\tau\left(\tau - \frac{L}{v_0}\right)} = \frac{(\pi+4)\tau}{4\sqrt{2}} \approx 1{,}26\text{ с.}$$

Ответ: брусок остановится за время $\tilde{\tau} = \frac{(\pi+4)}{4\sqrt{2}}\tau \approx 1{,}26$ с.

Задание 2.

Вопрос: При изотермическом сжатии объем одного моля идеального газа уменьшился на 0,5%. На сколько процентов изменилось его давление? Ответ (с точностью до десятых долей процента) подтвердить вычислением.

Ответ: Согласно закону Бойля-Мариотта $p + \delta p = \frac{pV}{V+\delta V} = \frac{p}{1-0{,}005} \approx p(1+0{,}005)$, то есть давление увеличивается на 0,5% с точностью до поправок порядка $(0{,}005)^2$, что заметно лучше требуемой точности.

Задача: $\nu = 2$ моля неона сначала адиабатически сжали, совершив над ним работу $A = 2$ Дж, а затем изохорически нагрели, сообщив ему количество теплоты $Q = 3$ Дж. В результате давление неона увеличилось на 0,1%. Найти с ошибкой не более 3К начальную температуру неона. Универсальная газовая постоянная $R \approx 8{,}31$ Дж/моль·К.

Решение: Так как общее увеличение давления в двух процессах оказалось очень малым, то относительные изменения параметров состояния в обоих процессах можно считать малыми. При адиабатическом сжатии $\delta Q = 0$, и, согласно первому началу термодинамики, $p\delta V + \frac{3}{2}(p\delta V + V\delta p) = 0$, откуда $A = -p\delta V = \frac{3}{5}V\delta p = \frac{3}{5}pV\frac{\delta p_1}{p}$, и с учетом уравнения Менделеева-Клапейрона $A = \frac{3}{5}\nu RT\frac{\delta p_1}{p} \Rightarrow \frac{\delta p_1}{p} = \frac{5A}{3\nu RT}$. При изохорическом нагревании $Q = \frac{3}{2}V\delta p_2 = \frac{3}{2}pV\frac{\delta p_2}{p}$. Значит, $\frac{\delta p_2}{p} = \frac{2Q}{3\nu RT}$. Так как $\delta p = \delta p_1 + \delta p_2$, то $\frac{\delta p}{p} = \frac{5A+2Q}{3\nu RT} \Rightarrow T = \frac{5A+2Q}{3\nu R}\frac{p}{\delta p} \approx 321$ К

Ответ: $T = \frac{5A+2Q}{3\nu R}\frac{p}{\delta p} \approx 321$ К.

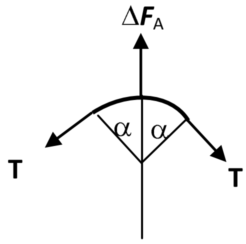
Задание 3.

Вопрос: Гибкий легкий провод расстелили на гладкой горизонтальной поверхности, и его концы присоединили к клеммам источника постоянного тока (длина провода заметно больше расстояния между клеммами). Какой станет форма конура? Ответ объяснить.

Ответ: Ток, текущий по проводу, будет создавать вокруг себя магнитное поле, которое будет действовать на другие участки этого провода с током. Так как в противолежащих участках контура ток течет в противоположные стороны, то их взаимодействие приведет к отталкиванию, и все участки контура будут стремиться максимально удалится друг от друга. Поэтому контур примет форму, близкую к окружности.

Задача: Из медной проволоки с площадью сечения S сделано кольцо радиусом R, по которому течет ток I. Кольцо помещается в однородное магнитное поле так, что его ось совпадает с направлением линий магнитной индукции. Найдите максимальное значение индукции B магнитного поля, при которой кольцо не разорвется, если прочность меди на разрыв равна σ (этот параметр равен отношению силы, которая требуется для разрыва проволоки к площади ее поперечного сечения).

Решение: Рассмотрим малый элемент кольца Δl. На него действуют сила Ампера ΔF_A и силы натяжения T. При этом $\Delta F_A = IB\Delta l$. Так как элемент кольца находится в равновесии, то сила Ампера уравновешивает результирующую сил натяжения: $\Delta F_A = 2T\sin\alpha$. Длина элемента кольца $\Delta l = R \cdot 2\alpha$, а при малом угле $\sin\alpha \approx \alpha$, и тогда $IBR \cdot 2\alpha \le 2\sigma S\alpha$. Значит, при выполнении условий равновесия $B \le \dfrac{\sigma S}{IR}$.



Ответ: $B_{\min} = \dfrac{\sigma S}{IR}$.

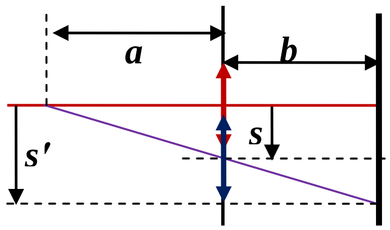
Задание 4.

Вопрос: Линза диаметром 4 см имеет толщину 4 мм. Всегда ли эту линзу при построении изображения точечного источника можно считать тонкой? Ответ объяснить.

Ответ: Поскольку толщина линзы много меньше ее диаметра, то размеры линзы много меньше радиусов кривизны ее поверхности, то есть одно из требований использования приближения тонкой линзы выполнено. При выводе формулы тонкой линзы пренебрегают ее толщиной и заменяют синусы и тангенсы углов падения и преломления на их величину в радианной мере. Для корректности таких действий эти углы должны быть малыми (должно работать параксиальное приближение). Таким образом, описанную линзу можно считать тонкой не всегда, а только для лучей с малыми углами падения.

Задача: На экране, расположенном на расстоянии $b = 75$ см от тонкой линзы с оптической силой $D = 4$ дптр, получено четкое изображение источника. Плоскость экрана параллельна плоскости линзы. Линзу перемещают поступательно со скоростью $v = 0{,}2$ м/с, причем вектор скорости перпендикулярен ее главной оптической оси и лежит в плоскости, проходящей через эту ось и точку расположения источника. С какой скоростью движется по экрану изображение источника?

Решение: Так как изображение получено на экране, то линза собирающая, а изображение действительное. При поперечном смещении линзы на расстояние s изображение смещается на экране на расстояние $s'=\frac{a+b}{a}s$, где a и b – расстояние от источника до линзы и от линзы до изображения соответственно. Из формулы линзы находим связь этих расстояний: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=D \Rightarrow 1+\frac{b}{a}=bD$. Таким образом, $s'=bD\cdot s$. Разделив это соотношение на время перемещения, получим, что $v'=bD\cdot v=0{,}6$ м/с.



7, 8 и 9 классы.

Задания, возможные решения и ответы для всех использованных вариантов.

БИЛЕТ № 11 (УФА)

Задание 1:

Вопрос: По дороге из школы ученик пробежал три четверти пути со скоростью 7 км/ч, потом некоторое время постоял на месте (разговаривал с приятелем), а затем дошел до дома со скоростью 3 км/ч. Оказалось, что на разговор он потратил треть всего времени пути. Какой была его средняя скорость на всем пути от школы до дома?

Ответ: Пусть s – полный путь школьника, а t – полное потраченное время. Тогда $t=\frac{3s}{4v_1}+\frac{t}{3}+\frac{s}{4v_2}$, откуда находим: $v_{cp}\equiv\frac{s}{t}=\frac{8v_1v_2}{3(v_1+3v_2)}=3{,}5$ км/ч.

Задача: Филеас Фогг и Паспарту остановились в гостинице на углу квартала. Рано утром мистер Фикс бросил камень в окно их номера и побежал вокруг квартала с постоянной скоростью, рассчитывая вернуться и полюбоваться на результат. Он обежал квартал за время $T=10$ мин, и, не снижая скорости, побежал дальше. Спустя время $t=3$ мин из гостиницы выбежал Паспарту и бросился за ним (его скорость тоже постоянна). Паспарту догнал Фикса за время $t_1=6$ мин. За какое время (t_2) он бы встретил Фикса, если бы побежал с той же скоростью вокруг квартала навстречу ему?

Решение: Пусть L - периметр квартала, l - расстояние от гостиницы до ближайшего угла (то есть то самое расстояние, на которое отбежал Фикс от гостиницы к тому моменту, когда Паспарту начал погоню), u - скорость Фикса, v - скорость Паспарту. Тогда мы можем написать: $L=u\cdot T$, $l=u\cdot t$. В начале погони расстояние между Фиксом и Паспарту равно l, а скорость их сближения равна $v-u$. Поэтому $l=(v-u)\cdot t_1$. В случае, когда Паспарту побежит навстречу Фиксу, начальное расстояние между ними по пути вокруг квартала (то самое, которое им сообща надо пробежать до встречи) равно $L-l$, а скорость сближения теперь $v+u$. Значит, $L-l=(v+u)\cdot t_2$. Подставляя L и l из двух первых уравнений в третье, найдем, что: $u\cdot t=(v-u)\cdot t_1$, то есть $v=\frac{t+t_1}{t_1}u$. Подставим все полученные выражения в последнюю, 4-ю формулу, и обнаружим, что:

$$u\cdot(T-t)=\left(u\frac{t+t_1}{t_1}+u\right)\cdot t_2=u\cdot\left(\frac{t+t_1}{t_1}+1\right)\cdot t_2=u\cdot\frac{2t_1+t}{t_1}\cdot t_2.$$

Одинаковый множитель u может быть сокращен, и мы находим: