МАТЕРИАЛЫ ЗАДАНИЙ

олимпиады школьников
«ПОКОРИ ВОРОБЬЁВЫ ГОРЫ!»
по физике

2015/2016 учебный год

http://pvg.mk.ru

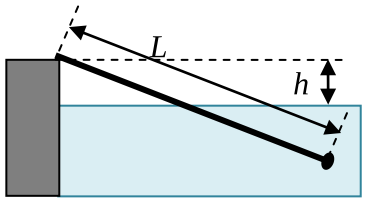
ЗАДАНИЕ ОЧНОГО (ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНОГО) ЭТАПА. 10 и 11 классы.

БИЛЕТ № 01 (УФА, 10-11 классы): возможные решения.

Задание 1:

Вопрос: От каких факторов зависит величина, точка приложения и направление силы Архимеда? Приведите примеры ситуаций, когда ее направление не совпадает с вертикалью. Может ли сила Архимеда сообщить очень легкому телу в покоящейся жидкости ускорение, превышающее ускорение свободного падения? Ответ объяснить.

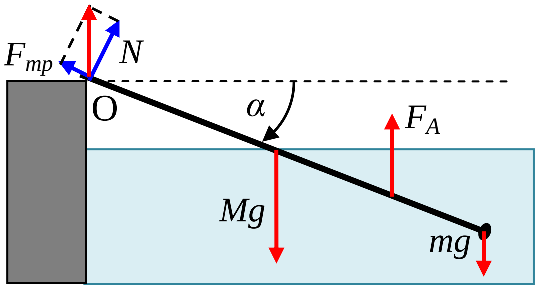
Задача: Узкая тонкая однородная доска длиной $L = 1$ м лежит, опираясь одним из концов на борт бассейна. При этом второй конец доски опущен в воду, и к нему прикреплен небольшой груз (см. рис.). Высота борта над водой $h = 40$ см. Коэффициент трения между доской и бортом бассейна $\mu = 0{,}75$. При каком максимальном отношении массы груза к массе доски $x \equiv \dfrac{m}{M}$ доска может покоиться? Вода в бассейне неподвижна, плотность воды $\rho_0 = 1$ г/см^3, плотность дерева, из которого изготовлена доска $\rho = 0{,}5$ г/см^3.



Ответ на вопрос: Согласно закону Архимеда, величина силы Архимеда равна весу вытесненной телом жидкости (важно отметить, что вес может создаваться не только силой тяжести – это сила, с которой жидкость, находившаяся на месте тела, действовала бы на окружающую тело жидкость). Точка приложения силы Архимеда тоже совпадает с точкой приложения веса вытесненной жидкости, а направление – противоположно: F_A направлена перпендикулярно поверхностям постоянного давления в жидкости. Закон Архимеда относится к равновесию тела в жидкости – если тело движется с ускорением, то и величина силы Архимеда изменяется. В частности, даже очень легкому телу в покоящейся жидкости сила Архимеда не может сообщить ускорение, превышающее ускорение свободного падения: в самом деле, всплытие легкого тела происходит за счет выталкивающего действия жидкости, которая опускается под действием силы тяжести, и поэтому не может перемещаться с ускорением, превышающим g.

Максимальная оценка: 5 баллов.

Решение задачи: Доска может покоиться под действием силы тяжести, веса груза, силы Архимеда и силы взаимодействия с бортом бассейна, являющейся суммой силы нормальной реакции борта и силы трения (см. рис.). Если α - угол наклона доски к горизонтали, то равенство нулю суммы горизонтальных проекций сил дает $N\sin(\alpha) = F_{mp}\cos(\alpha) \Rightarrow F_{mp} = N \cdot tg(\alpha)$. Так как сила трения покоя $F_{mp} \le \mu N$, то доска может покоиться только при $tg(\alpha) \le \mu$. С другой стороны, угол α должен удовлетворять уравнению моментов относительно точки опоры доски O: $+F_A\left(L - \frac{L'}{2}\right)\cos(\alpha) - Mg\frac{L}{2}\cos(\alpha) - mgL\cos(\alpha) = 0$, где $L' = L - \frac{h}{\sin(\alpha)}$ – длина погруженной в воду части доски, и сила Архимеда $F_A = \rho_0 V_{погр} g = \rho_0 g \frac{L'}{L}\frac{M}{\rho} = \frac{\rho_0}{\rho}\frac{L'}{L}Mg$.



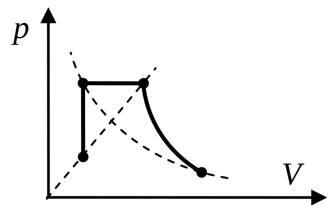
Таким образом, $\frac{Mg}{2L}\left[\frac{\rho_0}{\rho}\left(L^2 - \frac{h^2}{\sin^2(\alpha)}\right) - L^2\right] - mgL = 0$, и из этого соотношения находится связь массы груза с углом наклона доски в равновесии: $m = \frac{M}{2}\left[\frac{\rho_0}{\rho}\left(1 - \frac{h^2}{L^2\sin^2(\alpha)}\right) - 1\right]$. Как видно, максимальная возможная масса груза соответствует максимальному возможному углу $\alpha_{\max} = arctg(\mu) \Rightarrow \sin^2(\alpha_{\max}) = \frac{\mu^2}{1+\mu^2}$, и поэтому $x_{\max} = \frac{1}{2}\left[\frac{\rho_0}{\rho}\left(1 - \frac{(1+\mu^2)h^2}{\mu^2 L^2}\right) - 1\right] = \frac{1}{18}$.

ОТВЕТ: $x_{\max} = \frac{1}{2}\left[\frac{\rho_0}{\rho}\left(1 - \frac{(1+\mu^2)h^2}{\mu^2 L^2}\right) - 1\right] = \frac{1}{18} \approx 0{,}056$. **Максимальная оценка: 20 баллов.**

Задание 2:

Вопрос: Чему может быть равна теплоемкость одного моля идеального газа в изохорном и изобарном процессах?

Задача: Постоянное количество идеального газа участвует в процессе, диаграмма которого показана на рисунке в координатах давление-объем. Известно, что при изохорном нагревании газ получает количество теплоты, равное $Q = 60$ кДж, а после изобарного расширения температура газа становится в $n = 9$ раз больше наименьшей (для всего процесса).

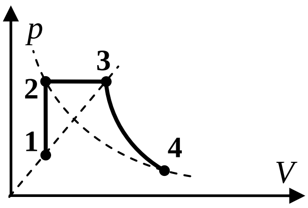


Найдите работу газа при адиабатическом расширении. Линии, показанные пунктиром – прямая, проходящая через начало координат, и изотерма.

Ответ на вопрос: Теплоемкость идеального газа в изохорном процессе определяется только изменением его внутренней энергии, поэтому $c_V = \frac{i}{2}R$, где i – число степеней свободы молекулы: $i=3$ для одноатомного идеального газа, $i=5$ для двухатомного, $i=6$ для многоатомного. В изобарном процессе теплоемкость увеличивается за счет совершаемой газом работы, поэтому $c_p = c_V + R = \frac{i+2}{2}R$.

Максимальная оценка: 5 баллов.

Решение задачи: Занумеруем точки на диаграмме так, как показано на рисунке. При адиабатическом расширении $Q_{34} = A_{34} + \Delta U_{34} = 0 \Rightarrow A_{34} = -\Delta U_{34}$. Из диаграммы видно, что $T_4 - T_3 = -(T_3 - T_2)$, и поэтому $A_{34} = \Delta U_{23} = \frac{i}{2}\nu R(T_3 - T_2)$. С другой стороны, теплота,



полученная газом при изохорном нагревании $Q = \frac{i}{2}\nu R(T_2 - T_1)$.

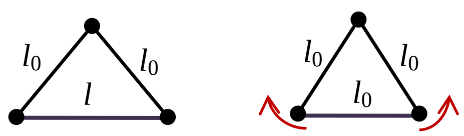
С учетом того, что линия 1-3 проходит через начало координат, $\frac{V_3}{V_1} = \frac{p_3}{p_1} \equiv k$, поэтому $\frac{T_2}{T_1} = \frac{T_3}{T_2} = k$. Кроме того, ясно, что минимальная температура в процессе – это T_1. Поэтому $\frac{T_3}{T_1} = n = k^2 \Rightarrow k = \sqrt{n}$. Таким образом, $\frac{A_{34}}{Q} = \frac{T_3 - T_2}{T_2 - T_1} = \frac{n - \sqrt{n}}{\sqrt{n} - 1} = \sqrt{n}$, и $A_{34} = \sqrt{n}Q = 180$ кДж.

ОТВЕТ: $A_{34} = \sqrt{n}Q = 180$ **кДж. Максимальная оценка: 20 баллов.**

Задание 3:

Вопрос: Чему равна потенциальная энергия электростатического взаимодействия четырех одинаковых точечных зарядов q, расположенных в вершинах квадрата со стороной a?

Задача: Три маленьких одинаковых заряженных шайбы соединены попарно двумя легкими нерастяжимыми нитями длиной $l_0 = 40$ см и одной упругой резинкой, длина

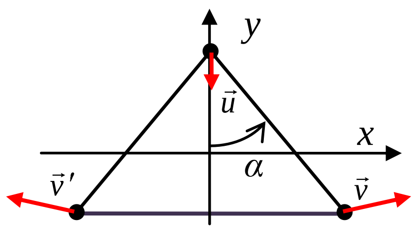


которой в недеформированном состоянии также равна l_0 (сила упругости резинки пропорциональна деформации). Если поместить их на гладкую горизонтальную поверхность, то в состоянии покоя длина резинки будет равна $l = 50$ см. Удерживая шайбы, резинку переводят в недеформированное состояние (так, что шайбы образуют равносторонний треугольник) и отпускают шайбы без начальной скорости. До какой максимальной длины растянется резинка в ходе дальнейшего движения? Какой будет максимальная скорость «средней» шайбы? Циклическая частота колебаний одной шайбы на резинке равна $\omega = 20$ с$^{-1}$.

Ответ на вопрос: Потенциальная энергия определена с точностью до постоянного слагаемого, поэтому сначала необходимо определить ее однозначно: как это обычно делается для системы зарядов конечных размеров, будем считать, что нулевая потенциальная энергия отвечает разнесению всех зарядов на бесконечность. Тогда потенциальная энергия взаимодействия каждой пары зарядов равна $U_{ij} = \frac{q_i q_j}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}}$. В квадрате есть 4 пары зарядов на расстоянии a, и 2 пары – на расстоянии $a\sqrt{2}$. Значит, полная энергия взаимодействия $U = 4\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 a} + 2\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 a\sqrt{2}} = \frac{(4+\sqrt{2})q^2}{4\pi\varepsilon_0 a}$.

Максимальная оценка: 5 баллов.

Решение задачи: В состоянии покоя силы электростатического отталкивания каждой пары шайб уравновешиваются силой натяжения нити или силой упругости резинки, связывающей их. Если q - заряд каждой из шайб, а k – коэффициент жесткости резинки, то $k(l-l_0) = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 l^2}$. Когда шайбы отпустили из положения «правильный треугольник», они стали двигаться, растягивая резинку. В силу симметрии системы ясно, что «центральная» шайба (находящаяся между нитями) движется только вдоль оси *y*, а «крайние» шайбы имеют одинаковые по величине симметрично направленные скорости (см. рисунок, где $\vec{u}$ – скорость центральной шайбы). В силу закона сохранения импульса *y*-компоненты скоростей крайних шайб равны $v_y = \frac{u}{2}$, и, так как нити остаются натянутыми, то проекции скоростей шайб на нить между



ними должны быть равны: $u\cos(\alpha) = v_x \sin(\alpha) - v_y \cos(\alpha) \Rightarrow v_x = \frac{3\cos(\alpha)}{2\sin(\alpha)}u = \frac{3\sqrt{l_0^2 - x^2}}{2x}u$ (здесь x – координата «правой» шайбы). Значит, кинетическую энергию системы можно выразить через скорость средней шайбы: $E_K = \frac{m\vec{u}^2}{2} + 2\frac{m\vec{v}^2}{2} = \frac{3mu^2}{4}\frac{3l_0^2 - 2x^2}{x^2}$.

Потенциальную энергию системы удобно определить так, чтобы она равнялась нулю в начальном положении системы (при недеформированной резинке): $E_П = \frac{k(2x-l_0)^2}{2} + \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 x} - \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 l_0}$. Выразив здесь заряд через l, получим: $E_П(x) = -\frac{k(2x-l_0)}{2l_0 x}[l^2(l-l_0) - l_0 x(2x-l_0)]$. При изучении движения шайб будем пренебрегать излучением. Тогда максимальная длина резинки будет соответствовать моменту остановки шайб, когда $E_П(x) = 0 \Rightarrow x^2 - \frac{l_0}{2}x - \frac{l^2(l-l_0)}{2l_0} = 0$. Нужное нам значение соответствует положительному корню этого уравнения. Следовательно, максимальная длина резинки $l_{\max} = 2x = \frac{l_0}{2}\left[1 + \sqrt{1 + \frac{8l^2(l-l_0)}{l_0^3}}\right] \approx 60{,}6$ см. Изменение скорости в процессе движения шайб можно найти из закона сохранения энергии $E_K + E_П = 0$. Значит,

$$u^2 = \frac{2k\,x(2x-l_0)}{3m\,l_0(3l_0^2-2x^2)}[l^2(l-l_0)-l_0x(2x-l_0)].$$

Ясно, что $\frac{k}{m}=\omega^2$, и, если ввести обозначение $z\equiv\frac{x}{l_0}$, и учесть, что $\frac{l^2(l-l_0)}{l_0^3}=\frac{25}{64}$, то выражение для скорости средней шайбы принимает вид

$$u(z)=\frac{\omega l_0}{4}\sqrt{\frac{z(2z-1)(25+64z-128z^2)}{6(3-2z^2)}}.$$

Максимум скорости соответствует максимуму этой функции. Разумным приближением для его вычисления является использование того соображения, что кинетическая энергия системы максимальна в момент прохождения положения равновесия, то есть при $z=\frac{l}{2l_0}=\frac{5}{8}$. Значит, максимальная скорость средней шайбы должна достигаться вблизи этого значения. Тогда $u_{\max}\approx\frac{5\omega l_0}{4\sqrt{142}}\approx 0{,}84$ м/с.

ОТВЕТ: максимальная длина резинки $l_{\max}=\frac{l_0}{2}\left[1+\sqrt{1+\frac{8l^2(l-l_0)}{l_0^3}}\right]\approx 60{,}6$ **см, максимальная скорость средней шайбы соответствует максимуму функции** $u(z)=\frac{\omega l_0}{4}\sqrt{\frac{z(2z-1)(25+64z-128z^2)}{6(3-2z^2)}}$**, и примерно равна** $u_{\max}\approx\frac{5\omega l_0}{4\sqrt{142}}\approx 0{,}84$ **м/с.**

Максимальная оценка: 20 баллов.

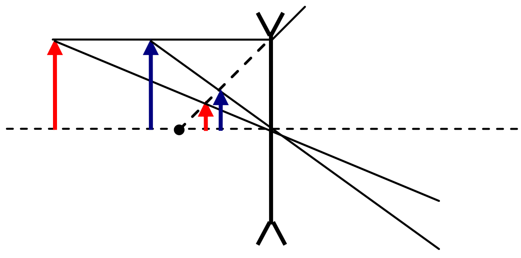
ПРИМЕЧАНИЕ: На самом деле из-за того, что распределение кинетической энергии между шайбами зависит от конфигурации системы (это видно из формулы для кинетической энергии), «настоящий» максимум немного смещен: $z_m\approx 0{,}659$, и $u_{\max}\approx 0{,}87$ м/с. Но такая точность в решении на олимпиаде не требовалась.

Задание 4:

Вопрос: Что нужно сделать для того, чтобы поперечное увеличение изображения пламени свечи, наблюдаемого через рассеивающую тонкую линзу, уменьшилось – придвинуть линзу к свече или отодвинуть от нее? Ответ объяснить.

Задача: С помощью тонкой линзы на экране получено изображение нити небольшой лампочки, развернутой перпендикулярно оси линзы, с увеличением $|\Gamma|=2{,}5$. Когда экран придвинули к линзе на расстояние $s=8$ см, то для получения нового четкого изображения лампочку пришлось сдвинуть вдоль оси на расстояние $s'=1{,}6$ см. Каким стало увеличение изображения?

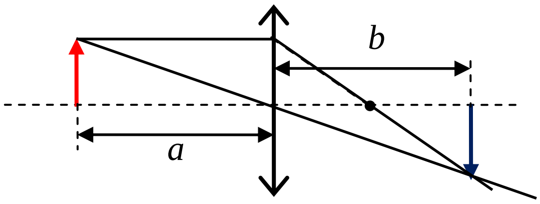
Ответ на вопрос: Рассеивающая линза создает мнимое изображение пламени свечи. Как видно из построения, при приближении линзы к объекту, поперечный размер его прямого мнимого изображения увеличивается. Следовательно, для уменьшения поперечного увеличения



изображения пламени свечи необходимо отодвинуть линзу от свечи.

Максимальная оценка: 5 баллов.

Решение задачи: Поскольку изображение получается на экране, то это действительное изображение, линза является собирающей, и нить лампы находится от линзы на расстоянии a, превышающем фокусное расстояние линзы F. Из формулы линзы $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{F}$ следует, что $b=\frac{aF}{a-F}$ и $a=\frac{bF}{b-F}$. Поэтому модуль увеличения $|\Gamma|=\frac{|b|}{|a|}=\frac{F}{a-F}=\frac{b-F}{F}$.



Используя эти формулы, найдем, что новое увеличение $|\Gamma'|=\frac{b-s-F}{F}=|\Gamma|-\frac{s}{F} \Rightarrow \frac{s}{F}=|\Gamma|-|\Gamma'|$ и одновременно $\frac{1}{|\Gamma'|}=\frac{a+s'-F}{F}=\frac{1}{|\Gamma|}+\frac{s'}{F}$, откуда $\frac{s'}{F}=\frac{1}{|\Gamma'|}-\frac{1}{|\Gamma|}=\frac{|\Gamma|-|\Gamma'|}{|\Gamma'||\Gamma|}$ (ясно, что при приближении экрана к линзе, т.е. при уменьшении b, расстояние a должно увеличиваться). В результате находим: $\frac{s}{s'}=|\Gamma||\Gamma'| \Rightarrow |\Gamma'|=\frac{s}{s'|\Gamma|}=2$.

ОТВЕТ: $|\Gamma'|=\frac{s}{s'|\Gamma|}=2$. **Максимальная оценка: 20 баллов.**

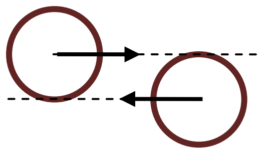
ИТОГО МАКСИМАЛЬНАЯ ОЦЕНКА ЗА РАБОТУ: 100 баллов.

БИЛЕТ № 02 (СОЧИ, 10-11 классы): возможные решения

Задание 1:

Вопрос: Две упругие однородные шайбы, скользившие поступательно по гладкому льду, столкнулись. При каких условиях после удара они также будут двигаться поступательно?

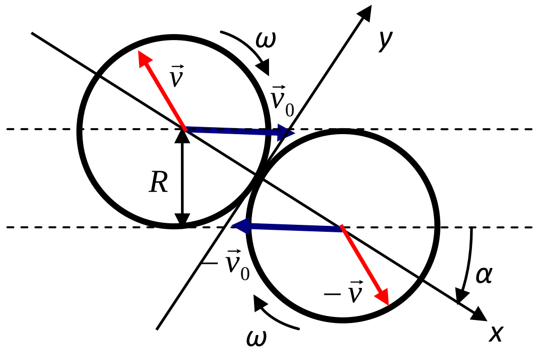
Задача: Два одинаковых упругих колечка радиуса R с шероховатой боковой поверхностью скользят навстречу друг другу по гладкой горизонтальной поверхности с одинаковыми по величине скоростями v_0. Линии движения центров колечек проходят по касательной к ним (см. рисунок). После удара они начали вращаться с угловыми скоростями $\omega=\frac{v_0}{4R}$. Найти величину скоростей движения центров масс колечек после удара.



Ответ на вопрос: Шайбы не начнут вращаться, если моменты сил их взаимодействия относительно центров масс (которые совпадают с геометрическими центрами, так как шайбы однородны) будут равны нулю. Это условие центральности соударения. Оно заведомо выполняется при <u>лобовом ударе</u>. При косом ударе необходимо, чтобы силы взаимодействия шайб были направлены по их радиусам, то есть боковые поверхности шайб должны быть <u>гладкими</u>.

Максимальная оценка: 5 баллов.

Решение задачи: Рассмотрим геометрию удара колец. Используем декартовы координаты (x, y), причем ось x направим вдоль прямой, проходящей через центры колец в момент удара, а ось y – перпендикулярно ей. Кольца взаимодействуют посредством парных сил нормальной реакции (величина N, направлены вдоль оси x) и трения (величина F_{mp}, направлены вдоль оси y).



Вращение колец появляется только благодаря силам трения, поэтому движение вдоль оси x происходит независимо от вращения и движения по оси y, то есть как при обычном упругом лобовом ударе тел одинаковой массы. Введем обозначения: пусть m – масса каждого из колец, $\vec{v}_0$ - скорость «первого» кольца до удара, $\vec{v}$ - его скорость после удара (из симметрии системы яи закона сохранения импульса ясно, что скорости «второго» кольца – это $-\vec{v}_0$ и $-\vec{v}$ соответственно), ω - угловые скорости колец после удара (соударение нецентральное, и за счет сил трения оба кольца начнут вращаться по часовой стрелке). Угол между $\vec{v}_0$ и осью x $\alpha = \arcsin\left(\frac{R}{2R}\right) = \frac{\pi}{6}$. Тогда из анализа движения по оси x следует, что $v_x = -v_0 \cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2} v_0$. Проекция скорости первого кольца на ось y уменьшается за счет действия силы трения, и эта же сила изменяет скорость вращения этого кольца ωR. Заметим также, что при «разгоне» вращения все массы кольца двигаются вокруг центра с одинаковыми скоростями и ускорениями в любой момент времени. Поэтому:

$$\begin{Bmatrix} mv_y - mv_0 \sin\alpha = -F_{mp} \cdot \Delta t \\ mR\omega = F_{mp} \cdot \Delta t \end{Bmatrix} \Rightarrow v_y = v_0 \sin\alpha - R\omega = \frac{v_0}{4}$$

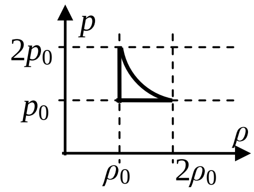
(здесь Δt - длительность времени скольжения колец друг по другу). Значит, величина скорости центра масс первого кольца $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \frac{\sqrt{13}}{4} v_0$. Ясно, что у второго кольца скорость такая же.

ОТВЕТ: $v_1 = v_2 = \frac{\sqrt{13}}{4} v_0$. **Максимальная оценка: 20 баллов.**

Задание 2:

Вопрос: Идеальный газ участвует в процессе, в котором его температура изменяется от T_0 до $5T_0$, а график зависимости давления от температуры – парабола $p = p_0\left[1 + \frac{T^2}{4T_0^2}\right]$. Плотность газа в конце процесса равна ρ_K. Чему равна минимальная плотность газа в этом процессе?

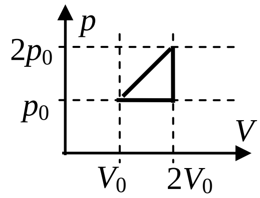
Задача: Постоянное количество гелия является рабочим телом тепловой машины, цикл которой в координатах «давление-плотность» показан на рисунке. Найти максимальное КПД этой тепловой машины (т.е в пренебрежении всеми потерями, кроме передачи тепла холодильнику). Криволинейный участок диаграммы – гипербола $p\rho = const$.



Ответ на вопрос: Плотность идеального газа можно связать с давлением и температурой с помощью уравнения Менделеева-Клапейрона: $\rho = \dfrac{m}{V} = \dfrac{\mu p}{RT}$. Следовательно, в этом процессе $\rho(T) = \dfrac{\mu p_0}{2RT_0}\left[\dfrac{2T_0}{T} + \dfrac{T}{2T_0}\right]$. Поскольку минимальное значение величины $x + \dfrac{1}{x}$ равно 2 (при $x = 1$), и значение $T = 2T_0$ попадает в интервал температур процесса, то $\rho_{\min} = \dfrac{\mu p_0}{RT_0}$. Плотность в конце процесса $\rho_K = \dfrac{29}{20}\dfrac{\mu p_0}{RT_0}$, поэтому $\rho_{\min} = \dfrac{20}{29}\rho_K$.

Максимальная оценка: 5 баллов.

Решение задачи: Удобно перейти к координатам давление-объем: в рассматриваемом цикле один из процессов – изохорное охлаждение, другой – изобарное сжатие, а третий процесс соответствует в координатах $p-V$ диаграмме в виде прямой, проходящей через начало координат: $\dfrac{p}{V} = const$ (см. рисунок, на котором введено обозначение $V_0 \equiv \dfrac{m}{2\rho_0}$, m – масса гелия). В таком процессе удобно вычислять работу $A = \dfrac{1}{2}p_0V_0$ и теплоту, отданную холодильнику



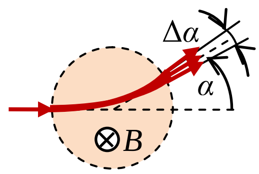
(это сумма количеств теплоты, отведенной от газа в изохорном и изобарном процессах) $Q_X = \dfrac{3}{2}2V_0p_0 + \dfrac{5}{2}p_0V_0 = \dfrac{11}{2}p_0V_0$. Значит, $\eta = \dfrac{A}{A+Q_X} = \dfrac{1}{12} \approx 8{,}3\%$.

ОТВЕТ: $\eta = \dfrac{A}{A+Q_X} = \dfrac{1}{12} \approx 8{,}3\%$. **Максимальная оценка: 20 баллов.**

Задание 3:

Вопрос: Как может двигаться заряженная частица в однородном и постоянном магнитном поле (если других силовых полей нет)? Опишите все возможные случаи.

Задача: Узкий пучок ионов с одинаковым зарядом, но с немного различающимися массами направляют в область цилиндрической формы, в которой создано однородное магнитное поле, направленное по оси цилиндра. Скорость ионов перпендикулярна этой оси. После прохождения области пучок отклонился от направления первоначального движения на угол $\alpha = 30°$ и у него

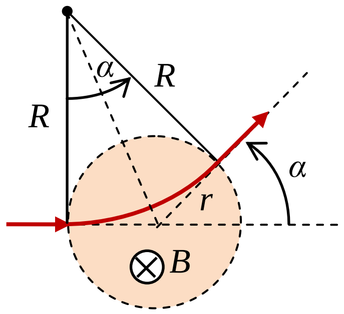


появилась расходимость с углом $\Delta\alpha \approx 0{,}6°$ (начальная расходимость была пренебрежимо мала по сравнению с этой). Найти (в процентах) разброс масс ионов пучка ($\Delta m / m = ?$).

Ответ на вопрос: В магнитном поле на частицу действует сила Лоренца $\vec{F} = q[\vec{v} \times \vec{B}]$. Поэтому, если частица движется вдоль поля, то эта сила равна нулю, и частица будет двигаться равномерно и прямолинейно. При движении частицы в плоскости, перпендикулярной $\vec{B}$, движение является равномерным вращением по окружности – модуль скорости и индукция поля постоянны, и поэтому постоянен модуль ускорения, которое направлено перпендикулярно скорости. Если же скорость частицы будет иметь и составляющую, параллельную полю, и составляющую, перпендикулярную полю, то движение будет комбинацией двух разобранных, то есть частица будет двигаться по винтовой линии.

Максимальная оценка: 5 баллов.

Решение задачи: Пусть q – заряд каждого иона. Под действием силы Лоренца ионы двигаются по окружности, радиус которой определяется из уравнения для центростремительной компоненты ускорения:



$m\dfrac{v^2}{R} = qvB \Rightarrow R = \dfrac{mv}{qB}$ (v – скорость ионов). Из построения видно, что угол отклонения иона при прохождении цилиндрической области радиуса r с магнитным полем определяется из соотношения $tg\left(\dfrac{\alpha}{2}\right) = \dfrac{r}{R} = \dfrac{qBr}{mv}$. Изменение этого угла при малом изменении массы: $\Delta\left[tg\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)\right] \approx \dfrac{\Delta\alpha}{2\cos^2(\alpha/2)} \approx \dfrac{qBr}{v}\left(-\dfrac{1}{m^2}\right)\Delta m$. Так как знак изменения нам не важен (знак «минус» здесь просто показывает, что увеличение массы соответствует уменьшению угла), перепишем это соотношение в виде $\dfrac{qBr}{mv}\dfrac{\Delta m}{m} = tg\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)\dfrac{\Delta m}{m} \approx \dfrac{\Delta\alpha}{2\cos^2(\alpha/2)}$, откуда $\dfrac{\Delta m}{m} \approx \dfrac{\Delta\alpha}{\sin(\alpha)} \approx 2{,}1\%$.

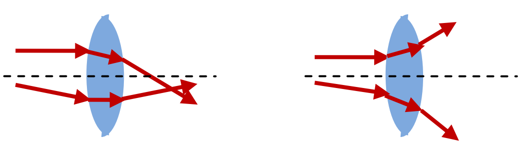
ОТВЕТ: $\dfrac{\Delta m}{m} \approx \dfrac{\Delta\alpha}{\sin(\alpha)} \approx 2{,}1\%$. **Максимальная оценка: 20 баллов.**

Задание 4:

Вопрос: В каком случае двояковыпуклая тонкая линза может являться рассеивающей? Ответ обосновать.

Задача: Небольшая лампа подвешена на высоте $H = 1{,}8$ м над горизонтальной поверхностью стола. Между лампой и столом поместили линзу, оптическая сила которой $D = 2{,}5$ дптр, таким образом, что на столе наблюдалось четкое изображение нити лампы (плоскость линзы горизонтальна). Линзу переместили вниз на расстояние h, и оказалось, что и в этом случае на столе наблюдается четкое изображение нити. Найти h.

Ответ на вопрос: На обеих поверхностях двояковыпуклой линзы, помещенной в однородную прозрачную среду, параксиальный световой луч преломляется в одну сторону: наклоняется к оси, если показатель преломления среды меньше, чем



показатель преломления вещества линзы, и отклоняется от оси в противоположном случае (см. рисунок). Таким образом, двояковыпуклая линза может быть рассеивающей, если она помещена в среду, оптически более плотную, чем вещество линзы.

Максимальная оценка: 5 баллов.

Решение задачи: Пусть x – высота размещения линзы над поверхностью стола. Тогда расстояние между лампой и линзой равно $H-x$, и четкое изображение нити наблюдается, если (в соответствии с формулой линзы): $\frac{1}{x}+\frac{1}{H-x}=D$, откуда следует уравнение $x^2-Hx+\frac{H}{D}=0$. Ясно, что и высота начального, и высота конечного положения линзы должны удовлетворять этому квадратному уравнению. Поэтому эти высоты есть не что иное, как два корня этого уравнения. Величина перемещения линзы является разностью двух его корней. Значит, она равна корню квадратному из дискриминанта уравнения: $h=\sqrt{H^2-4\frac{H}{D}}=\sqrt{H(H-4D^{-1})}=0.6$ м.

ОТВЕТ: $h=\sqrt{H(H-4D^{-1})}=0.6$ **м. Максимальная оценка: 20 баллов.**

ИТОГО МАКСИМАЛЬНАЯ ОЦЕНКА ЗА РАБОТУ: 100 баллов.

БИЛЕТ № 03 (БАРНАУЛ, 10-11 классы) : возможные решения

Задание 1:

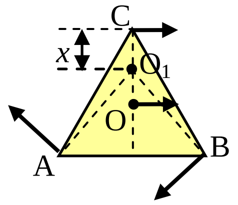
Вопрос: В некоторый момент времени величины скоростей двух концов недеформируемого стержня, совершающего движение в плоскости, оказались равны. Как в этот момент времени может двигаться центр этого стержня? Опишите все возможные варианты.

Задача: Равносторонний треугольник ABC, вырезанный из плоского однородного листа жести, скользит по гладкой горизонтальной поверхности. В некоторый момент времени величины скоростей двух его вершин (A и B) оказались равны друг другу, а величина скорости третьей вершины (C) – в два раза меньше их скоростей. Найти расстояние, на которое сместится центр треугольника за время одного полного оборота треугольника вокруг вертикальной оси. Длина стороны треугольника равна a.

Ответ на вопрос: Прежде всего заметим, что у недеформируемого стержня равные по модулю скорости концов должны быть направлены так, что их проекции на стержень тоже равны (это условие следует из постоянства длины стержня). Поэтому их проекции на ось, перпендикулярную стержню, также должны быть равны по величине, то есть они либо равны друг другу, либо противоположны. Если они равны (то есть равны не только величины скоростей, но и сами векторы скорости концов стержня), то весь стержень движется поступательно, и тогда скорость его центра равна скорости концов. Если они направлены противоположно, а составляющая скоростей вдоль стержня равна нулю (скорости концов противоположны и перпендикулярны стержню), то стержень вращается вокруг покоящегося центра. Если они направлены противоположно, а составляющая скоростей вдоль стержня отлична от нуля, то центр стержня движется вдоль стержня со скоростью, равной этой составляющей, а стержень при этом вращается вокруг него. К тем же результатам можно прийти, если для непоступательного движения стержня обратить внимание на то, что из равенства модулей скоростей следует, что они равноудалены от мгновенного центра вращения, и мгновенный центр вращения лежит на срединном перпендикуляре к стержню. Поэтому скорость центра при неравенстве векторов скоростей концов либо ноль (центр стержня и есть мгновенный центр вращения), либо направлена вдоль стержня.

Максимальная оценка: 5 баллов.

Решение задачи: Поскольку скорости вершин A и B равны по величине, то мгновенный центр вращения треугольника O_1 лежит на срединном перпендикуляре к стороне AB. Если x – расстояние от O_1 то вершины C, то по условию $v_C = \omega x = \frac{v_A}{2} = \frac{\omega}{2}\sqrt{x^2 + \frac{a^2}{4}}$ (здесь ω – угловая скорость вращения). Из этого соотношения находим,



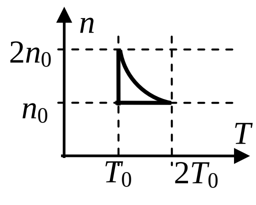
что $x = \frac{a}{2\sqrt{3}}$. Поскольку расстояние от центра масс треугольника (совпадающего с его геометрическим центром O) до вершин равно $R = \frac{a}{\sqrt{3}}$, то расстояние от мгновенного центра вращения до центра масс $r = R - x = \frac{a}{2\sqrt{3}}$. Таким образом, скорость центра масс $v_O = \omega r = \omega \frac{a}{2\sqrt{3}}$. Центр масс треугольника на гладкой горизонтальной поверхности движется равномерно и прямолинейно. Это значит, что за время одного оборота стержня $T = \frac{2\pi}{\omega}$ центр масс сместится на расстояние $s = v_O T = \frac{\pi a}{\sqrt{3}}$.

ОТВЕТ: $s = \frac{\pi a}{\sqrt{3}}$. **Максимальная оценка: 20 баллов.**

Задание 2:

Вопрос: У какого процесса с идеальным газом диаграмма процесса в координатах «полученное газом количество теплоты – совершенная им работа» описывается соотношением $Q = Q_0 + A - A_0$ (Q_0, A_0 - начальные значения для данного процесса)? Как в таком процессе вычислить работу газа через параметры начального и конечного состояния?

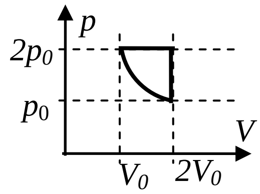
Задача: Постоянное количество гелия является рабочим телом тепловой машины, цикл которой в координатах «концентрация молекул-температура» показан на рисунке. Найти максимальное КПД этой тепловой машины (т.е в пренебрежении всеми потерями, кроме передачи тепла холодильнику). Криволинейный участок диаграммы – гипербола $nT = const$.



Ответ на вопрос: Из первого начала термодинамики следует, что в данном процессе внутренняя энергия газа не изменяется. Поскольку внутренняя энергия постоянного количества идеального газа зависит только от температуры, то таким процессом является изотермический процесс. В изотермическом процессе работа может быть вычислена как площадь под кривой процесса в координатах давление-объем. Для изотермы с температурой T зависимость $p(V)=\frac{\nu RT}{V}$, поэтому $A_{12}=\nu RT\cdot\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)=p_1V_1\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$.

Максимальная оценка: 5 баллов.

Решение задачи: Построим диаграмму цикла в координатах давление-объем: цикл состоит из изохорного охлаждения (процесс с $n=const$), изотермического сжатия, и изобарного расширения (процесс $nT=const$ – из основного уравнения молекулярно-кинетической теории следует, что при этом $p=const$). На диаграмме введены обозначения $p_0\equiv n_0kT_0$, $V_0\equiv N/(2n_0)$. Работа газа за цикл равна разности работ в изохорном и изотерическом процессах: $A=2p_0V_0[1-\ln(2)]$. Газ получает тепло только в процессе изобарного расширения, поэтому теплота нагревателя $Q_H=2p_0V_0+\frac{3}{2}(4p_0V_0-2p_0V_0)=5p_0V_0$. Таким образом, $\eta=\frac{A}{Q_H}=\frac{2[1-\ln(2)]}{5}$.

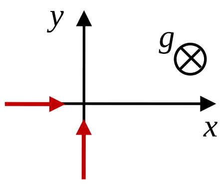


Ответ: $\eta=\frac{2[1-\ln(2)]}{5}\approx 12{,}3\%$. **Максимальная оценка: 20 баллов.**

Задание 3:

Вопрос: Определите условия, при выполнении которых заряженная частица в однородном магнитном поле при наличии еще и постоянной силы другой природы, может двигаться равномерно-прямолинейно (такое движение называют «дрейфовым»).

Задача: Электростатическая пушка «выстреливает» наночастицы с удельным зарядом $\beta=+5\cdot10^{-5}$ Кл/кг со скоростью $v=3500$ м/с. Выстрелы производились горизонтально в вакуумированном пространстве, в котором было создано магнитное поле, линии индукции которого также горизонтальны. Оказалось, что существуют два взаимно перпендикулярных направления, в которых наночастицы двигаются после выстрела прямолинейно. Связав с этими направлениями систему координат, найдите направление и величину индукции магнитного поля. Ускорение свободного падения принять равным $g\approx10$ м/с^2.



Ответ на вопрос: Для равномерно-прямолинейного движения необходимо, чтобы сумма приложенных к частице сил равнялась нулю. Поэтому при таком движении сила Лоренца, действующая на частицу со стороны магнитного поля, должна уравновешивать постоянную силу другой природы: $q[\vec{v}\times\vec{B}]=\vec{F}$. Для выполнения этого требования необходимо, чтобы вектора $\vec{v}$ и $\vec{B}$ были перпендикулярны линии действия силы $\vec{F}$, а перпендикулярная $\vec{B}$ составляющая скорости частицы должна иметь величину $v_\perp=\frac{F}{|q|B}$. Продольная (параллельная $\vec{B}$) составляющая скорости при этом может быть любой.

Максимальная оценка: 5 баллов.

Решение задачи: Прямолинейное движение частицы при наличии магнитного поля и поля тяжести возможно только как дрейфовое движение, описанное в ответе на вопрос. Поэтому линии индукции магнитного поля должны проходить так, чтобы перпендикулярные $\vec{B}$

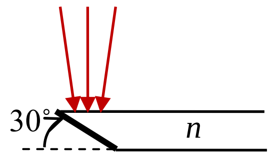
составляющие скоростей вдоль обоих «особых» направлений, которые у нас выбраны в качестве направлений осей x и y, были равны. Для этого перпендикуляр к $\vec{B}$ должен быть биссектрисой угла между скоростями, а величина индукции должна быть равной $B = \frac{mg}{qv_\perp} = \frac{g\sqrt{2}}{\beta v} \approx 80{,}8$ Тл. С учетом знака заряда (сила Лоренца в обоих случаях должна быть направлена вверх) находим, что $\vec{B}$ должна быть направлена «влево-вверх», под углом 45° к оси y. В выбранной системе координат $\vec{B} = \left(-\frac{g}{\beta v}, \frac{g}{\beta v}\right) = \left(-\frac{400}{7}, +\frac{400}{7}\right)$ Тл.

ОТВЕТ: вектор $\vec{B} = \left(-\frac{g}{\beta v}, \frac{g}{\beta v}\right) = \left(-\frac{400}{7}, +\frac{400}{7}\right)$ Тл, величина индукции $B = \frac{g\sqrt{2}}{\beta v} \approx 80{,}8$ Тл. Максимальная оценка: 20 баллов.

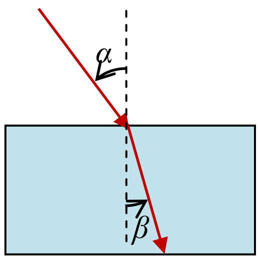
Задание 4:

Вопрос: Сформулируйте закон преломления света. При каких условиях он применим?

Задача: Плоскопараллельная пластина, изготовленная из прозрачного материала с показателем преломления $n = \sqrt{2} \approx 1{,}41$, срезана с одной стороны под углом $30°$, и срез покрыт хорошо отражающим слоем. Узкие пучки параллельных световых лучей, излучаемые лазером, направляются на пластину в плоскости, перпендикулярной ребру среза, таким образом, что они отражаются от среза. При каких углах падения эти пучки попадут на край пластины, противоположный срезу, с интенсивностью, близкой к исходной? Размеры пластины очень значительно превышают ее толщину.



Ответ на вопрос: Закон преломления света можно сформулировать следующим образом: «При падении светового луча на границу раздела прозрачных сред различной оптической плотности он испытывает преломление. Луч падающий, луч преломленный и нормаль к границе раздела сред в точке падения лежат в одной плоскости. Отношение синусов углов падения (α) и преломления (β) равно постоянной для данных сред величине, называемой относительным показателем преломления этих сред: $\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} = n$ (закон Снеллиуса).» Относительный показатель преломления равен отношению скоростей распространения света в первой и второй средах.



Этот закон является одним из законов геометрической оптики, поэтому он справедлив только в соответствующем приближении, то есть в случае, когда характерные размеры оптических неоднородностей и поперечные размеры световых пучков много больше длины световой волны. Кроме того, при падении из оптически менее плотной среды (при $n < 1$) для углов падения, превышающих угол полного внутреннего отражения $\alpha \geq \alpha_c = \arcsin(n)$, преломленный луч отсутствует.

Максимальная оценка: 5 баллов.

Решение задачи: Для того, чтобы световой луч дошел до края длинной тонкой пластины, почти не потеряв в интенсивности, он должен при отражении от граней пластины испытывать полное внутреннее отражение. Значит, угол его падения на грани пластины

должен превышать угол $\alpha_c = \arcsin\left(\frac{1}{n}\right)$. Рассмотрим два возможных случая отклонения луча от нормального падения (см. рисунок):

1) Отклонение «вправо» от нормали (будем для этого случая считать угол падения α и соответствующий ему угол преломления β положительными). Как видно из построения в этом случае, угол падения на грань пластины после отражения от среза $\alpha_1 = \frac{\pi}{3} - \beta$, то есть для полного отражения нужно, чтобы $\frac{\pi}{3} - \beta \geq \arcsin\left(\frac{1}{n}\right) \Rightarrow \beta \leq \frac{\pi}{3} - \arcsin\left(\frac{1}{n}\right)$. Для угла падения это означает, что $\sin(\alpha) = n \cdot \sin(\beta) \leq n \cdot \sin\left[\frac{\pi}{3} - \arcsin\left(\frac{1}{n}\right)\right] = \frac{\sqrt{3(n^2-1)}-1}{2}$. Итак, для этого случая $\alpha \leq \arcsin\left(\frac{\sqrt{3(n^2-1)}-1}{2}\right) = \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right) \approx 21{,}5°$. Следует отметить, что при любых α для заданного $n=\sqrt{2}$ угол $\beta \leq 45°$, поэтому $\alpha_1 > 0$ – направление падения отраженного от среза луча измениться не может.

2) Отклонение «влево» от нормали ($\alpha < 0$ и $\beta < 0$). Теперь угол падения на грань пластины после отражения от среза $\alpha_2 = \frac{2\pi}{3} + \beta$, и для полного отражения нужно, чтобы $\frac{2\pi}{3} + \beta \geq \arcsin\left(\frac{1}{n}\right) \Rightarrow \beta \geq \arcsin\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{2\pi}{3}$. Соответственно $\sin(\alpha) \geq -\frac{\sqrt{3(n^2-1)}+1}{2}$, и при заданном $n=\sqrt{2}$ это условие выполняется для любых $-90° < \alpha \leq 0$.

Ясно, что в обоих случаях при выполнении условия полного внутреннего отражения в первом отражении луча от грани пластины оно будет выполняться и в последующих отражениях, и луч дойдет до противоположного края пластины.

ОТВЕТ: $-90° < \alpha \leq \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right) \approx 21{,}5°$. **Максимальная оценка: 20 баллов.**

Примечание: Вычисление значения $\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$ для зачета задачи не требовалось.

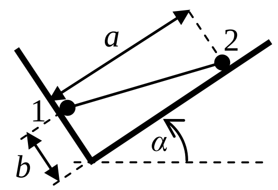
ИТОГО МАКСИМАЛЬНАЯ ОЦЕНКА ЗА РАБОТУ: 100 баллов.

БИЛЕТ № 04 (САРАТОВ, 10-11 классы): возможные решения.

Задание 1:

Вопрос: В каких случаях центр тяжести твердого тела (т.е. точка приложения равнодействующей сил тяжести) совпадает с его центром масс? Ответ объяснить.

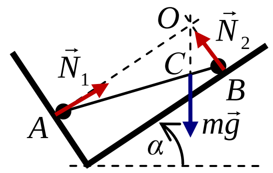
Задача: «Гантель» из легкого жесткого стержня и двух массивных маленьких шариков одинакового радиуса положили в гладкую яму в виде прямого двугранного угла, одна из плоскостей которого составляет угол $\alpha = 30°$ с горизонтом. Оказалось, что гантель находится в равновесии, если отношение расстояний от шариков до вершины угла $\frac{a}{b} \equiv n = 3$. Найти отношение масс шариков.



Ответ на вопрос: В однородном поле тяжести. Действительно, равнодействующая сила должна быть равна сумме составляющих сил, и ее момент относительно выбранной оси должен быть равен сумме моментов составляющих сил. Если направить ось x горизонтально, а ось y – вертикально (по направлению $\vec{g}$), и разбить тело на «материальные точки», то суммарный момент сил тяжести, действующих на эти точки, $M = \sum m_i g \cdot x_i = g \sum m_i \cdot x_i = mg \cdot x_{ЦМ}$, где m - масса тела, а $x_{ЦМ}$ - координата его центра масс. Таким образом, в однородном поле тяжести точкой приложения равнодействующей сил тяжести действительно является его центр масс.

Максимальная оценка: 5 баллов.

Решение задачи: В состоянии равновесия сумма моментов сил тяжести и сил нормальной реакции, действующих на гантель, должна быть равна нулю. Если считать моменты относительно точки O, находящейся на пересечении линий действия сил нормальной реакции, то становится ясно, что и момент силы тяжести относительно этой точки должен быть равен нулю, и поэтому линия действия силы тяжести (а это вертикаль, проходящая через центр масс гантели)



должна проходить через точку O. Значит, центр масс гантели находится в точке C, и $\frac{m_2}{m_1} = \frac{|AC|}{|BC|}$. Пусть величина угла $O\hat{C}B \equiv \beta$. Тогда, поскольку $C\hat{O}B = \alpha$, то по теореме синусов $|BC| = a\frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)}$. Аналогично $|AC| = b\frac{\sin((\pi/2)-\alpha)}{\sin(\pi-\beta)} = b\frac{\cos(\alpha)}{\sin(\beta)}$. Следовательно:

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{b}{a} ctg(\alpha) = 3\sqrt{3} \approx 5{,}2\,.$$

Ответ: $\frac{m_2}{m_1} = \frac{b}{a} ctg(\alpha) = 3\sqrt{3} \approx 5{,}2$. **Максимальная оценка: 20 баллов.**

Задание 2:

Вопрос: В герметичном баллоне находятся одинаковые количества гелия и неона. Снаружи баллона – атмосфера из азота. В стенке баллона прокололи небольшое отверстие. Количество какого из газов (гелия или неона) будет больше спустя небольшое время после этого?

Задача: Вертикальная гладкая трубка с запаянными концами разделена на две части маленькой каплей ртути. Над каплей находится неон, под ней – гелий (газы не проникают мимо ртутной «пробки»), причем массы газов одинаковы. Изначально капля находилась точно посередине трубки. Во сколько раз нужно увеличить абсолютную температуру газов, чтобы капля стала делить объем трубки в соотношении 1:2?

Ответ на вопрос: Неона. Уменьшение количества газа зависит от того, сколько его молекул успело покинуть баллон. Количество вылетевших за малое время молекул, в свою очередь, зависит от площади отверстия, концентрации и скорости молекул. Для двух газов изначально совпадают все эти характеристики, кроме скоростей молекул – так как молекулы гелия более легкие, то при той же температуре (то есть при той же средней кинетической энергии молекул) они движутся с большими скоростями. Значит, за малое время вылетит больше молекул гелия, а останется больше молекул неона. Внешняя атмосфера на этот процесс не влияет.

Максимальная оценка: 5 баллов.

Решение задачи: Вес капли массой M уравновешивается разностью сил давления газов, то есть $Mg = p_1 S - p_2 S$. Из уравнения Менделеева-Клапейрона для каждого газа $pSl = \frac{m}{\mu} RT \Rightarrow pS = \frac{m}{\mu}\frac{RT}{l}$ (l - длина занятого газом участка трубки, а m - его масса). При начальной температуре T длины участков равны половине длины трубки: $l_1 = l_2 = \frac{L}{2}$. При конечной температуре T': $l_1' = \frac{2L}{3}$, $l_2' = \frac{L}{3}$ (видно, что давление гелия при нагревании будет расти быстрее, чем давление неона, и поэтому поршень будет подниматься). Следовательно,

$$Mg = \frac{m}{\mu_1}\frac{2RT}{L} - \frac{m}{\mu_2}\frac{2RT}{L} = \frac{m}{\mu_1}\frac{3RT'}{2L} - \frac{m}{\mu_2}\frac{3RT'}{L} \Rightarrow \frac{T'}{T} = \frac{4(\mu_2 - \mu_1)}{3(\mu_2 - 2\mu_1)}.$$

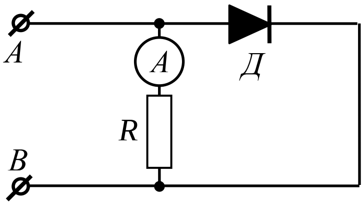
С учетом того, что молярные массы гелия $\mu_1 = 4$ г/моль и неона $\mu_2 = 20$ г/моль, то $\frac{T'}{T} = \frac{16}{9}$.

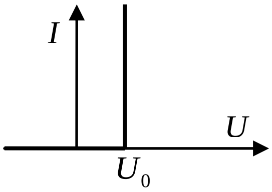
Ответ: $\frac{T'}{T} = \frac{4(\mu_2 - \mu_1)}{3(\mu_2 - 2\mu_1)} = \frac{16}{9} \approx 1{,}78$. **Максимальная оценка: 20 баллов.**

Задание 3:

Вопрос: Опишите различие в механизме проводимости примесных полупроводников разного типа.

Задача: В схеме, показанной на рисунке слева, диод *Д* не является идеальным – его вольтамперная характеристика показана на рисунке справа. При подключении к клеммам А и В одного аккумулятора амперметр показывает ток $I_1 = 0{,}36$ А, при подключении двух таких аккумуляторов, соединенных последовательно – ток $I_2 = 0{,}48$ А, трех – ток $I_3 = 0{,}50$ А. При последовательном подключении четырех таких аккумуляторов ток в ветви с амперметром остается равным $I_3 = 0{,}50$ А. Найти ЭДС и внутреннее сопротивление источника, а также сопротивление резистора R, если пороговое напряжение диода $U_0 = 4{,}5$ В. Внутреннее сопротивление амперметра пренебрежимо мало.





Ответ на вопрос: Примесные проводники разделяют на полупроводники n-типа и p-типа в зависимости от того, является примесь «донорной» (в этом случае атом примеси имеет лишний валентный электрон по сравнению с атомом самого полупроводника, и этот электрон, перемещается по решетке полупроводника) или «акцепторной» (напротив, атом примеси имеет на один электрон меньше, и эффективно захватывает электрон, принадлежащий соседнему атому решетки полупроводника, тот, в свою очередь, также производит захват, и в результате происходит перемещение по кристаллу «дырки» - незанятой электронной вакансии). Таким образом, можно говорить, что в полупроводниках n-типа свободными носителями заряда являются электроны (это «электронный» механизм проводимости), а в полупроводниках p-типа – «дырки» («дырочный» механизм проводимости).

Максимальная оценка: 5 баллов.

Решение задачи: Если диод находится в открытом состоянии, то напряжение на нем равно U_0. Поэтому в этом случае ток в ветви с амперметром и резистором $I_R = \frac{U_0}{R}$, и не зависит от ЭДС и внутреннего сопротивления источника (и поэтому не зависит от количества подключенных аккумуляторов). Если же диод заперт, то для схемы с n аккумуляторами, ЭДС и внутреннее сопротивление каждого из которых равны соответственно $\mathcal{E}$ и r, $I_R = \frac{n\mathcal{E}}{R+nr}$. Режим с запертым диодом реализуется, если напряжение на резисторе меньше U_0: $I_R R < U_0 \Rightarrow n\mathcal{E}R < (R+nr)U_0 \Rightarrow n < \frac{RU_0}{\mathcal{E}R - U_0 r}$. Поэтому данные условия свидетельствуют о том, что при $n = 1{,}2$ диод заперт, а при $n = 3{,}4...$ диод открыт. Следовательно: $I_1 = \frac{\mathcal{E}}{R+r}$, $I_2 = \frac{2\mathcal{E}}{R+2r}$, а $I_3 = \frac{U_0}{R} \Rightarrow R = \frac{U_0}{I_3} = 9$ Ом. Исключая ЭДС из первых двух соотношений, находим, что $r = \frac{2I_1 - I_2}{2(I_2 - I_1)}\frac{U_0}{I_3} = 9$ Ом, а затем получаем выражение для ЭДС: $\mathcal{E} = \frac{I_1 I_2}{2I_3(I_2 - I_1)}U_0 = 6{,}48$ В. Можно убедиться, что найденные параметры приводят к значению $\frac{RU_0}{\mathcal{E}R - U_0 r} = \frac{25}{11} \approx 2{,}3$, то есть действительно диод открывается именно при добавлении третьего аккумулятора.

ОТВЕТ: $\mathcal{E} = \frac{I_1 I_2}{2I_3(I_2 - I_1)}U_0 = 6{,}48$ **В,** $r = \frac{2I_1 - I_2}{2(I_2 - I_1)}\frac{U_0}{I_3} = 9$ **Ом,** $R = \frac{U_0}{I_3} = 9$ **Ом.**

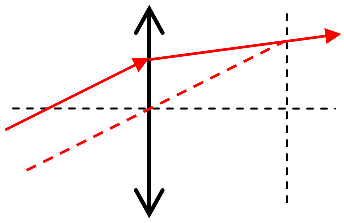
Максимальная оценка: 20 баллов.

Задание 4:

Вопрос: Опишите способ построения продолжения произвольного параксиального луча, падающего на поверхность тонкой собирающей линзы (в любой точке под любым углом).

Задача: С помощью объектива, состоящего из собирающей и рассеивающей линзы, величины фокусных расстояний которых совпадают ($F_1 = -F_2 \equiv F$), расположенных на общей оси на расстоянии $L=\frac{2}{3}F$ друг от друга, получили на экране изображение Солнца. Затем точно такое же по размеру изображение Солнца на этом экране удалось получить с помощью одной линзы. Чему равно ее фокусное расстояние?

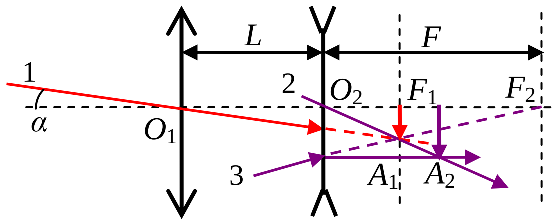
Ответ на вопрос: Для построения продолжения произвольного луча можно использовать тот факт, что тонкая собирающая линза собирает параллельные лучи так, что они пересекаются в фокальной плоскости линзы. Поэтому достаточно построить вспомогательный луч, параллельный рассматриваемому и проходящий через оптический центр линзы без преломления. Эти лучи должны пересечься в фокальной плоскости (см. рисунок).



Максимальная оценка: 5 баллов.

Решение задачи: Поскольку расстояние до Солнца значительно превосходит величину фокусного расстояния любой из рассматриваемых линз, то его изображение, создаваемое любой собирающей линзой, будет находиться в ее фокальной плоскости и будет иметь радиус $r=F\cdot tg(\alpha)$, где α – половина углового размера Солнца, видимого с Земли (мы считаем, что линзы всегда располагают так, что их оптическая ось направлена на Солнце) Сначала применим это утверждение к первой линзе объектива, и будем рассматривать создаваемое ей изображение мнимым источником для рассеивающей линзы. Проведем построение хода лучей:

Луч 1, идущий от крайней точки Солнца в оптический центр первой линзы объектива, создает изображение этой точки A_1 в фокальной плоскости этой линзы, на расстоянии r от оси. Изображение этой точки, даваемое второй линзой (A_2) можно построить с помощью лучей 2 (идущего через оптический центр второй линзы) и 3 (идущего в дальний фокус второй линзы – после преломления этот луч пойдет параллельно оптической оси системы). Поэтому радиус изображения Солнца, даваемого объективом (r'), можно найти из подобия треугольников:



$\frac{r'}{r}=\frac{|O_2F_2|}{|F_1F_2|}=\frac{F}{L}\Rightarrow r'=\frac{F^2}{L}tg(\alpha)$. Поскольку изображение, создаваемое одной линзой, имело такой же радиус, то $r'=F'\cdot tg(\alpha)=\frac{F^2}{L}tg(\alpha)\Rightarrow F'=\frac{F^2}{L}=\frac{3}{2}F$.

Ответ: $F'=\frac{F^2}{L}=\frac{3}{2}F$. **Максимальная оценка: 20 баллов.**

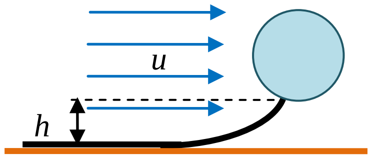
ИТОГО МАКСИМАЛЬНАЯ ОЦЕНКА ЗА РАБОТУ: 100 баллов.

БИЛЕТ № 05 (ЙОШКАР-ОЛА, 10-11 классы): возможные решения.

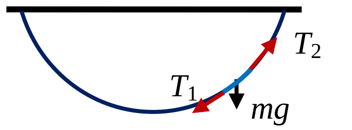
Задание 1:

Вопрос: Массивная цепочка из мелких гладких колечек подвешена за два конца к горизонтальному потолку в однородном поле тяжести. В каких точках сила натяжения цепочки в состоянии покоя максимальна и минимальна? Ответ обосновать.

Задача: Наполненный гелием воздушный шарик почти идеальной сферической формы, если его отпустить в безветренную погоду, будет подниматься вверх со скоростью, постепенно достигающей величины $V = 3$ м/с. Если привязать к нему кусок тонкой гибкой нерастяжимой однородной веревки, то шарик сможет подниматься вверх, если длина куска не превышает $l = 50$ см. К шарику привязали кусок такой же веревки длиной $L = 1{,}5$ м и расстелили нижний конец веревки на горизонтальной поверхности. Коэффициент трения между веревкой и поверхностью $\mu = 0{,}5$. С какой скоростью будет в установившемся режиме двигаться шарик с прикрепленной веревкой при ветре, дующем вдоль поверхности со скоростью $u = 2{,}5$ м/с? На какой высоте h над поверхностью будет двигаться верхний конец веревки? Воздействием ветра на веревку пренебречь. Сила сопротивления воздуха, действующая на шар, пропорциональна квадрату его скорости относительно воздуха.

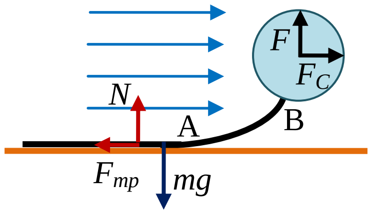


Ответ на вопрос: В состоянии покоя сумма сил, действующих на любой участок цепочки, равна нулю. Выделим небольшой ее участок, на который действуют сила тяжести и две силы натяжения. Как видно, горизонтальные составляющие сил натяжения должны быть равны, а вертикальная составляющая силы натяжения T_2 у верхнего конца участка должна быть больше вертикальной составляющей силы натяжения T_1 у нижнего конца на вес этого участка. Следовательно, $T_2 > T_1$ – сила натяжения растет «снизу вверх». Значит, сила натяжения максимальна в точках подвеса и минимальна в нижней точке цепочки.

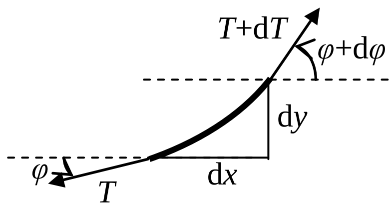


Максимальная оценка: 5 баллов.

Решение задачи: Пусть F – подъемная сила шара, равная разности сил Архимеда и веса шара. Тогда вес куска веревки длиной l в точности уравновешивает эту силу. Значит, если m – масса куска веревки длиной L, то $F = \frac{l}{L}mg$. Предельная скорость подъема шарика V соответствует ситуации, когда подъемная сила уравновешивается силой сопротивления воздуха: $F = \frac{l}{L}mg = F_C \equiv \beta V^2 \Rightarrow \beta = \frac{mgl}{LV^2}$. Теперь рассмотрим установившееся движение шарика с веревкой, скользящей по поверхности. Сумма сил, действующих на шарик и веревку, равна нулю, поэтому сила нормальной реакции поверхности $N = mg - F = mg\left(1 - \frac{l}{L}\right)$, а сила трения $F_{тр} = F_C = \beta(u - v)^2$, где v – искомая скорость.



Если $v>0$ и веревка скользит по поверхности, то $F_{тр}=\mu N$, и поэтому $\beta(u-v)^2=\mu mg\left(1-\frac{l}{L}\right)$. С учетом выражения для β находим: $v=u-V\sqrt{\mu\left(\frac{L}{l}-1\right)}$. Но в нашем случае $u<V\sqrt{\mu\left(\frac{L}{l}-1\right)}=3$ м/с. Следовательно, при указанном ветре шарик с веревкой двигаться не будут, и $F_{тр}=\beta u^2<\mu N$. Если теперь написать условие равновесия только для участка веревки, лежащей на земле, то можно найти силу натяжения веревки в точке A (начало участка веревки, «висящего» над землей): $T_A=F_{тр}=mg\frac{l}{L}\frac{u^2}{V^2}$. Сила натяжения веревки в точке B (точка прикрепления к шарику) $T_B=\sqrt{F^2+F_C^2}=mg\frac{l}{L}\sqrt{1+\frac{u^4}{V^4}}$. Кроме того, из условия равновесия висящего над землей участка веревки ясно, что длина этого участка равна l. Исследуем изменение силы натяжения на висящем участке веревки. Для этого рассмотрим равновесие малого



элемента веревки длиной dl, наклоненного под углом φ к горизонту, в проекциях на горизонтальную и вертикальную оси x и y:

$$\begin{cases}(T+dT)(\cos\varphi-\sin\varphi d\varphi)-T\cos\varphi=0\\(T+dT)(\sin\varphi+\cos\varphi d\varphi)-T\sin\varphi-mg\frac{dl}{L}=0\end{cases}$$

После сокращения подобных и пренебрежения квадратами малых величин:

$$\left.\begin{cases}dT\cos\varphi-T\sin\varphi d\varphi=0\\dT\sin\varphi+T\cos\varphi d\varphi=mg\frac{dl}{L}\end{cases}\right\}\Rightarrow dT=\frac{mg}{L}dl\sin\varphi=\frac{mg}{L}dy.$$

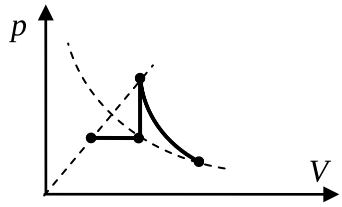
Суммируя малые приращения правой и левой части этого равенства, найдем, что $T_B-T_A=\frac{h}{L}mg$. В результате получаем, что $h=l\left[\sqrt{1+\frac{u^4}{V^4}}-\frac{u^2}{V^2}\right]\approx 26$ см.

ОТВЕТ: при заданном ветре шарик с веревкой двигаться не будут, $h=l\left[\sqrt{1+\frac{u^4}{V^4}}-\frac{u^2}{V^2}\right]\approx 26$ **см. Максимальная оценка: 20 баллов.**

Задание 2:

Вопрос: Чему равна разность теплоемкостей одного моля идеального газа в изобарном и изохорном процессах? Ответ обосновать.

Задача: Постоянное количество идеального газа участвует в процессе, диаграмма которого показана на рисунке в координатах давление-объем. Известно, что при изобарном нагревании газ получает количество теплоты, равное $Q=75$ кДж, а в ходе изохорного нагревания температура газа увеличивается в $n=2$ раза. Найдите работу газа при

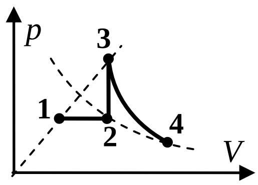


адиабатическом расширении. Линии, показанные пунктиром – прямая, проходящая через начало координат, и изотерма.

Ответ на вопрос: В изохорном процессе работа не совершается, поэтому подводимое к газу тепло расходуется только на изменение его внутренней энергии, которая для одного моля идеального газа зависит только от температуры, поэтому $Q_V = \Delta U = c_V \Delta T$. В изобарном процессе при том же изменении температур газ совершает работу $A = p\Delta V = R\Delta T$, как следует из уравнения Менделеева-Клапейрона. Значит, $Q_p = c_p \Delta T = c_V \Delta T + R\Delta T \Rightarrow c_p - c_V = R$. Итак, разность теплоемкостей одного моля идеального газа в изобарном и изохорном процессах равна универсальной газовой постоянной для любого идеального газа.

Максимальная оценка: 5 баллов.

Решение задачи: Занумеруем точки на диаграмме так, как показано на рисунке. При адиабатическом расширении $Q_{34} = A_{34} + \Delta U_{34} = 0 \Rightarrow A_{34} = -\Delta U_{34}$. Из диаграммы видно, что $T_4 - T_3 = -(T_3 - T_2)$, следовательно $A_{34} = \Delta U_{23} = \nu c_V (T_3 - T_2)$. С другой стороны, теплота, полученная газом при изобарном нагревании $Q = Q_{12} = \nu(c_V + R)(T_2 - T_1)$. С



учетом того, что линия 1-3 проходит через начало координат, $\dfrac{V_3}{V_1} = \dfrac{p_3}{p_1}$, и поэтому $\dfrac{T_2}{T_1} = \dfrac{T_3}{T_2} = n$. Значит, $A_{34} = \nu c_V n(T_2 - T_1) = n\dfrac{c_V}{c_V + R}Q$. Если ввести обозначение i – число степеней свободы молекулы газа ($i = 3,5,6$ для одноатомного, двухатомного и многоатомного идеального газа соответственно), то $c_V = \dfrac{i}{2}R$, и тогда $A_{34} = n\dfrac{i}{i+2}Q$, то есть $A_{34} = 90$ кДж для одноатомного идеального газа, $A_{34} \approx 107{,}1$кДж для двухатомного идеального газа, $A_{34} = 112{,}5$кДж для многоатомного идеального газа.

ОТВЕТ: $A_{34} = n\dfrac{i}{i+2}Q = \begin{cases} 90\text{ кДж} & \text{для одноатомного газа} \\ 107{,}1\text{кДж} & \text{для двухатомного газа} \\ 112{,}5\text{кДж} & \text{для многоатомного газа} \end{cases}$.

Максимальная оценка: 20 баллов.

Задание 3:

Вопрос: Какой будет разность потенциалов между обкладками плоского конденсатора емкостью C, на одну обкладку которого нанесен заряд $+q$, а на другую – заряд $+3q$?

Задача: В плоский воздушный конденсатор емкости C плотно вставили две проводящие пластины одинаковой толщины. Удельное сопротивление материала одной пластины равно ρ_1, а другой – ρ_2. На обкладки конденсатора подали постоянное напряжение U («плюс» источника соединен с обкладкой, с которой контактирует пластина 1). Найти заряд, накопившийся на границе раздела пластин при постоянном токе.

Ответ на вопрос: Поскольку для электростатического поля справедлив принцип суперпозиции, разность потенциалов есть линейная функция зарядов пластин $U(q_1, q_2) = aq_1 + bq_2$. Если добавить к этому два требования: изменение знака при «перенумерации» пластин ($U(q_1, q_2) = -U(q_2, q_1)$) и определение емкости ($U(q,-q) = \frac{q}{C}$), то эта функция легко устанавливается: $U(q_1, q_2) = \frac{q_1 - q_2}{2C} \Rightarrow U(3q, q) = \frac{q}{C}$.

Максимальная оценка: 5 баллов.

Решение задачи: После вставки пластин конденсатор превращается в пару последовательно соединенных резисторов с сопротивлениями $R_{1,2} = \rho_{1,2}\frac{d}{2S}$ (S - площадь сечения пластин, d - расстояние между ними). Напряжение на каждом из резисторов $U_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2}U = \frac{\rho_1}{\rho_1 + \rho_2}U$ и аналогично $U_2 = \frac{\rho_2}{\rho_1 + \rho_2}U$. Значит, напряженности электрического поля, создающие ток в каждой из пластин $E_1 = \frac{2U_1}{d} = \frac{2\rho_1}{\rho_1 + \rho_2}\frac{U}{d}$ и $E_2 = \frac{2\rho_2}{\rho_1 + \rho_2}\frac{U}{d}$. Эти поля создаются зарядами обкладок и зарядами границы раздела, а их разность связана с поверхностной плотностью заряда на границе раздела $E_2 - E_1 = \frac{2(\rho_2 - \rho_1)}{\rho_1 + \rho_2}\frac{U}{d} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$, и поэтому заряд границы раздела $q = \sigma S = \frac{\varepsilon_0 S}{d}\frac{2(\rho_2 - \rho_1)}{\rho_1 + \rho_2}U = \frac{2(\rho_2 - \rho_1)}{\rho_1 + \rho_2}CU$.

Ответ: $q = \frac{2(\rho_2 - \rho_1)}{\rho_1 + \rho_2}CU$. **Максимальная оценка: 20 баллов.**

Задание 4:

Вопрос: Что нужно сделать для того, чтобы поперечное увеличение перевернутого изображения пламени свечи, наблюдаемого через собирающую тонкую линзу, уменьшилось – придвинуть линзу к свече или отодвинуть от нее? Ответ объяснить.

Задача: Небольшой предмет перемещают вдоль главной оси тонкой линзы. Когда он расположен в точке A, то линза дает прямое изображение с поперечным увеличением $|\Gamma_1| = 2$, а при расположении в точке B – перевернутое изображение с $|\Gamma_2| = 3$. Чему равно увеличение $|\Gamma_3|$, если предмет поместить в точке C, находящейся посередине между точками A и B?

Ответ на вопрос: Пусть a – расстояние от пламени до линзы, а b – от линзы до его изображения. Тогда, согласно формуле линзы $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F}$ (где F – фокусное расстояние), откуда $b = \frac{aF}{a - F}$. Поперечное увеличение изображения $\Gamma = -\frac{b}{a} = \frac{F}{F - a}$ (здесь оно определено так, что является положительным для прямых изображений и отрицательным для обратных). Для собирающей линзы его модуль $|\Gamma| = \frac{F}{|F - a|}$ увеличивается при приближении предмета к ближнему фокусу линзы. Перевернутое изображение наблюдается при $a > F$, поэтому для уменьшения $|\Gamma|$ нужно отодвинуть линзу от свечи.

Максимальная оценка: 5 баллов.

Решение задачи: Отметим, что линза является собирающей, причем точка А находится от линзы на расстоянии a_A, которое меньше фокусного расстояние линзы F, а точка В – на расстоянии $a_B > F$. Увеличение изображения, определенное как в ответе на вопрос – с учетом знака, равно $\Gamma = \frac{F}{F-a}$. Следовательно, $a = \frac{\Gamma - 1}{\Gamma}F$. Поэтому для точек А и В получаем: $\Gamma_1 = |\Gamma_1| \Rightarrow a_A = \frac{|\Gamma_1|-1}{|\Gamma_1|}F$, $\Gamma_2 = -|\Gamma_2| \Rightarrow a_B = \frac{|\Gamma_2|+1}{|\Gamma_2|}F$. Так как точка С находится посередине между А и В, то $a_C = \frac{a_A + a_B}{2} = F\left(1 + \frac{|\Gamma_1| - |\Gamma_2|}{2|\Gamma_1||\Gamma_2|}\right)$. Так как по условию $|\Gamma_1| < |\Gamma_2|$, то $a_C < F$, и изображение для точки С прямое. Значит, $|\Gamma_3| = \Gamma_3 = \frac{F}{F-a_C} = \frac{2|\Gamma_1||\Gamma_2|}{|\Gamma_2| - |\Gamma_1|} = 12$.

ОТВЕТ: $|\Gamma_3| = \frac{2|\Gamma_1||\Gamma_2|}{|\Gamma_2| - |\Gamma_1|} = 12$. **Максимальная оценка: 20 баллов.**

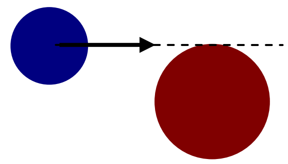
ИТОГО МАКСИМАЛЬНАЯ ОЦЕНКА ЗА РАБОТУ: 100 баллов.

БИЛЕТ № 06 (МОСКВА, 10-11 классы): возможные решения.

Задание 1:

Вопрос: Гладкая шайба, скользящая по горизонтальной поверхности, столкнулась с такой же (по размеру и массе) покоящейся шайбой. Вектор ее скорости в результате удара повернулся на $30°$. Под каким углом к направлению движения налетающей шайбы направлен вектор скорости другой шайбы после удара?

Задача: Гладкая цилиндрическая шайба покоится на гладкой горизонтальной поверхности. В нее врезается шайба, изготовленная из того же материала, той же высоты, радиус которой в $n = 1{,}5$ раза меньше, чем у покоящейся. Линия движения центра налетающей шайбы касается боковой поверхности покоящейся. Под какими углами к направлению движения налетающей шайбы будут двигаться шайбы после упругого удара?

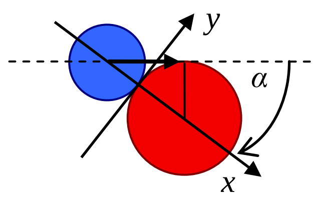


Ответ на вопрос: Будем считать удар упругим. Тогда закон сохранения импульса для двух одинаковых шайб $m\vec{v}_0 = m\vec{v}_1 + m\vec{v}_2 \Rightarrow \vec{v}_0 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ ($\vec{v}_{1,2}$ - скорости налетающей и первоначально покоящейся шайб после удара). Аналогичное сокращение масс произойдет при записи закона сохранения энергии, и поэтому $\vec{v}_0^2 = \vec{v}_1^2 + \vec{v}_2^2 = (\vec{v}_1 + \vec{v}_2)^2 \Rightarrow \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0$, то есть скорости шайб после удара перпендикулярны, и искомый угол $\beta = 90° - 30° = 60°$. При частично неупругом ударе угол между векторами скоростей должен быть меньше $90°$, и поэтому $\beta < 60°$. Однако степень неупругости должна быть не слишком велика – иначе угол поворота скорости не сможет быть таким заметным.

Максимальная оценка: 5 баллов.

ПРИМЕЧАНИЕ: В соответствии с указаниями, данными участникам, для зачета вопроса достаточно было разобрать случай упругого соударения.

Решение задачи: Рассмотрим момент соударения шайб. Поскольку сил трения нет, то силы взаимодействия шайб направлены перпендикулярно поверхности соприкосновения – по оси x (см. рисунок). Поэтому проекции их скоростей на ось $mv_0\cos(\alpha)=mv_x+MV_x$ сохраняются. Заметим, что треугольник, образованный центрами шайб и точки касания линии движения центра налетающей шайбы и боковой поверхности покоящейся, прямоугольный, и его гипотенуза равна сумме радиусов



шайб. Поэтому $\sin(\alpha)=\dfrac{R}{R+r}=\dfrac{n}{n+1}$. Значит, проекции скоростей шайб после удара на ось y: $V_y=0$, $v_y=v_0\sin(\alpha)=\dfrac{nv_0}{n+1}$. Кроме того, отношение масс шайб $\dfrac{M}{m}=n^2$. Поэтому закон сохранения проекции импульса на ось x дает:

$$mv_0\cos(\alpha)=mv_x+MV_x\Rightarrow v_0\cos(\alpha)=v_x+n^2V_x.$$

Так как энергия движения шайб по оси y не изменилась, то энергия движения по оси x тоже осталась неизменной:

$$\frac{mv_0^2\cos^2(\alpha)}{2}=\frac{mv_x^2}{2}+\frac{MV_x^2}{2}\Rightarrow v_0^2\cos^2(\alpha)=v_x^2+n^2V_x^2.$$

Решая полученную систему, и учитывая, что $\cos(\alpha)=\sqrt{1-\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{2n+1}}{n+1}$, находим, что $v_x=-\dfrac{(n^2-1)\sqrt{2n+1}}{(n+1)(n^2+1)}v_0$. Следовательно, налетающая шайба после удара движется под углом $\beta=\dfrac{\pi}{2}+arctg\left(\dfrac{(n^2-1)\sqrt{2n+1}}{n(n^2+1)}\right)$ к оси x (покоящаяся шайба после удара движется по оси x).

Итак: первоначально покоящаяся шайба движется под углом $\alpha=\arcsin\left(\dfrac{n}{n+1}\right)=\arcsin(0{,}6)\approx 37^\circ$ к направлению скорости налетающей шайбы. Поскольку $\beta=\dfrac{\pi}{2}+arctg\left(\dfrac{20}{39}\right)\approx 117^\circ$, то вектор скорости налетающей шайбы поворачивается на угол $\gamma=\beta-\alpha=\dfrac{\pi}{2}+arctg\left(\dfrac{20}{39}\right)-\arcsin(0{,}6)\approx 80^\circ$.

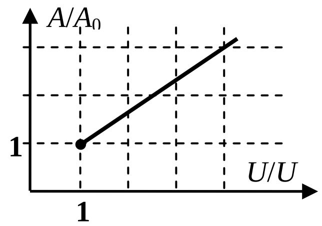
Ответ: первоначально покоящаяся шайба движется под углом $\alpha=\arcsin(0{,}6)\approx 37^\circ$ **к направлению скорости налетающей шайбы, вектор скорости налетающей шайбы поворачивается на угол** $\gamma=\dfrac{\pi}{2}+arctg\left(\dfrac{20}{39}\right)-\arcsin(0{,}6)\approx 80^\circ$ **(поскольку калькуляторами на олимпиаде пользоваться не разрешается, явное вычисление числовых значений обратных тригонометрических функций не требовалось). Максимальная оценка: 20 баллов.**

Задание 2:

Вопрос: Как выглядит диаграмма изобарного процесса над одноатомным идеальным газом в координатах $A-U$ («совершенная газом работа – внутренняя энергия»), выходящая из точки (A_0, U_0)?

Задача: Давление одного моля одноатомного идеального газа изохорически изменили от начального до некоторого значения. Затем изобарически уменьшили объем газа в $n=3$ раза. После этого газ изохорически перевели в конечное состояние. Зная, что температура газа в конечном состоянии в $k=1{,}2$ раза превышает его температуру в начальном состоянии и что полное количество теплоты, которым обменялся газ с внешними телами, равно нулю, найти отношение максимального давления газа к минимальному в этом процессе.

Ответ на вопрос: Внутренняя энергия одноатомного идеального газа $U=\frac{3}{2}pV$. Работа в изобарном процессе $A=p\Delta V=\Delta(pV)=\frac{2}{3}\Delta U$, поэтому уравнение диаграммы этого процесса можно записать как $A=A_0+\frac{2}{3}(U-U_0)$ (см. рисунок).



Максимальная оценка: 5 баллов.

Решение задачи: Пусть p_0 и V_0 - начальные значения давления и объема, p_1 - промежуточное значение давления, а p_2 - конечное. В соответствие с уравнением состояния и данными задачи:

$$\left\{\begin{array}{c} V_2=V_1=\dfrac{V_0}{n} \\ p_2V_2=RT_2=kRT_0=k\cdot p_0V_0 \end{array}\right\} \Rightarrow p_2=kn\cdot p_0>p_0.$$

Кроме того, поскольку во всем процессе работа совершается только при изобарическом сжатии $A=p_1\left(\frac{V_0}{n}-V_0\right)=-\frac{n-1}{n}p_1V_0$, а изменение внутренней энергии $\Delta U=\frac{3}{2}(p_2V_2-p_0V_0)=\frac{3}{2}(k-1)p_0V_0$. Значит, в соответствии с первым началом термодинамики $Q=-p_1\frac{n-1}{n}V_0+\frac{3}{2}(k-1)p_0V_0=0$, то есть $p_1=\frac{3n}{2(n-1)}(k-1)p_0<p_0$.

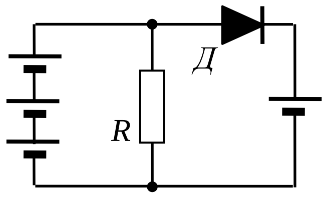
Значит, $\frac{p_{\max}}{p_{\min}}=\frac{p_2}{p_1}=\frac{2k(n-1)}{3(k-1)}=8$.

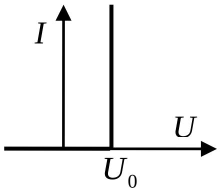
Ответ: $\frac{p_{\max}}{p_{\min}}=\frac{2k(n-1)}{3(k-1)}=8$. **Максимальная оценка: 20 баллов.**

Задание 3:

Вопрос: Резистор и идеальный диод соединены последовательно и подключены к полюсам источника, величина напряжения которого остается постоянной, а полярность изменяется на противоположную каждую секунду. Как изменится тепло, выделяющееся в резисторе за 10 секунд, если его с тем же диодом подключить к полюсам этого источника параллельно?

Задача: В схеме, показанной на рисунке слева, диод $Д$ не является идеальным – его





вольтамперная характеристика показана на рисунке справа. Все источники одинаковы, их внутреннее сопротивление равно r, а сопротивление резистора $R = 2r$. Найдите зависимость мощности тепловыделения в резисторе от величины ЭДС источников. Пороговое напряжение диода U_0 считать известным.

Ответ на вопрос: При последовательном подключении ток через резистор течет только в той половине каждого периода (равного 2 с), когда диод открыт, а при параллельном подключении – только когда диод заперт (сопротивление идеального диода в открытом состоянии равно нулю). Величина этого тока в обоих случаях равна частному от деления напряжения источника на сопротивление резистора. Поэтому средняя мощность тепловых потерь за период и количество тепла, выделяющегося за 5 полных периодов, не изменятся.
Максимальная оценка: 5 баллов.

Решение задачи: В этой схеме возможны два состояния диода: он может быть открыт либо заперт. Рассмотрим сначала ситуацию, когда диод заперт. В этом случае ток в ветви с диодом отсутствует, а ток через резистор $I = \dfrac{3\text{E}}{R+3r} = \dfrac{3\text{E}}{5r}$ (E – величина ЭДС источников).

Следовательно, мощность тепловыделения в резисторе $P = \left(\dfrac{3\text{E}}{5r}\right)^2 R = \dfrac{18\,\text{E}^2}{25r}$. Для того, чтобы диод действительно был заперт, напряжение на резисторе должно удовлетворять требованию $IR = \dfrac{6}{5}\text{E} \le \text{E} + U_0 \Rightarrow \text{E} \le 5U_0$. При $\text{E} > 5U_0$ диод открыт, и через него течет некоторый ток I_1. Тогда (в силу непрерывности тока) в ветви с тремя источниками должен течь ток $I + I_1$, поэтому для этого состояния диода:

$$\left\{\begin{aligned} IR &= U_0 + \text{E} + I_1 r \\ IR &= 3\text{E} - (I + I_1)3r \end{aligned}\right\} \Rightarrow I = \frac{3(2\text{E} + U_0)}{11r} \Rightarrow P = \frac{18(2\text{E} + U_0)^2}{121r}.$$

Ответ: $P = \begin{cases} \dfrac{18\,\text{E}^2}{25r}, & \text{E} \le 5U_0 \\ \dfrac{18(2\text{E}+U_0)^2}{121r}, & \text{E} > 5U_0 \end{cases}$. **Максимальная оценка: 20 баллов.**

Задание 4:

Вопрос: Чему может быть равно увеличение (отношение размера изображения к размеру предмета), даваемое тонкой рассеивающей линзой?

Задача: Точечный источник света размещен на главной оптической оси тонкой рассеивающей линзы. Расстояние между источником и его изображением равно L_1. Если передвинуть источник в точку, где находится его изображение, то изображение сместится в ту же сторону на расстояние L_2. Найти оптическую силу линзы (напомним, что у рассеивающей линзы она считается отрицательной).

Ответ на вопрос: Согласно формуле тонкой линзы, расстояние от изображения до линзы b связано с расстоянием от предмета до линзы: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{F}\Rightarrow b=\frac{aF}{a-F}$. Для поперечного увеличения $\Gamma_{\perp}=-\frac{b}{a}=\frac{F}{F-a}$. У рассеивающей линзы фокусное расстояние считается отрицательным, и поэтому $\Gamma_{\perp}=\frac{|F|}{|F|+a}$. Как видно, поперечное увеличение тонкой рассеивающей линзы для любого действительного объекта положительно (изображение всегда прямое) и меньше 1.

Максимальная оценка: 5 баллов.

Решение задачи: Пусть a - расстояние до линзы от первоначального положения источника. Линза рассеивающая, поэтому расположенное на расстоянии L_1 от источника изображение – мнимое, поэтому расстояние от изображения до линзы следует считать отрицательным (пусть оно будет $-b$). Тогда $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=-\frac{1}{|F|}$. Аналогично обозначая расстояние от второго изображения до линзы $-c$, получим уравнение $\frac{1}{b}-\frac{1}{c}=-\frac{1}{|F|}$. Кроме того, очевидно $L_1=a-b$, $L_2=b-c$. Решая полученную систему, находим: $D=-\frac{1}{|F|}=-\frac{(L_1-L_2)^2}{2L_1L_2(L_1+L_2)}$.

Ответ: $D=-\frac{(L_1-L_2)^2}{2L_1L_2(L_1+L_2)}$. **Максимальная оценка: 20 баллов.**

ИТОГО МАКСИМАЛЬНАЯ ОЦЕНКА ЗА РАБОТУ: 100 баллов.

БИЛЕТ № 07 (МОСКВА, 10-11 классы): возможные решения.

Задание 1:

Вопрос: Как связаны между собой амплитуда ускорения, амплитуда скорости и амплитуда смещения при гармонических колебаниях? Ответ обосновать.

Задача: Длинный железнодорожный состав движется по инерции со скоростью $v_0=6$ м/с по горизонтальным рельсам, а затем въезжает на горку с постоянным углом наклона $\alpha=4°$ к горизонту. Состав полностью остановился за время $T=30$ с, не доехав до конца склона. Какая часть состава к моменту остановки оказалась на склоне горки? Трением качения и длиной переходного участка при въезде на горку пренебречь. Ускорение свободного падения считать равным $g\approx 10$ м/с^2. Распределение массы по длине состава считать равномерным.

Ответ на вопрос: Гармоническими называются колебания, происходящие по закону синуса или косинуса. В общем случае закон движения тела, совершающего такие колебания с периодом T, можно описать выражением $x(t)=x_m\cos(\omega t+\varphi)$. Здесь за начало отсчета координаты взято положение равновесия, x_m – амплитуда смещения, $\omega = \frac{2\pi}{T}$ – циклическая частота, а φ – начальная фаза колебаний. В этом случае

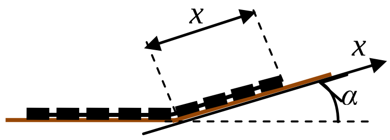
$$v_x(t) = -\omega x_m \sin(\omega t + \varphi) \equiv v_m \cos\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$a_x(t) = -\omega^2 x_m \cos(\omega t + \varphi) \equiv a_m \cos(\omega t + \varphi + \pi).$$

Как видно, амплитуда скорости $v_m = \omega x_m$, а амплитуда ускорения $a_m = \omega v_m = \omega^2 x_m$.

Максимальная оценка: 5 баллов.

Решение задачи: Запишем уравнение движения состава, используя в качестве координаты координату его «головы» x, отсчитываемую от начала подъема. Весь состав в каждый момент времени движется с одинаковыми скоростью и ускорением, причем это ускорение создается проекцией веса части состава, находящейся на склоне, на ось x:



$$ma_x = -mg\frac{x}{L}\sin(\alpha) \Rightarrow x'' + \frac{g\sin(\alpha)}{L}x = 0$$

(L – длина состава). Как видно, движение «головы» состава по склону происходит по гармоническому закону. Так как «колебание» начинается из положения равновесия, то его можно описать выражением $x(t) = x_m \sin(\omega t)$, где $\omega = \sqrt{\frac{g\sin(\alpha)}{L}}$, а амплитуда смещения выражается через амплитуду скорости, совпадающей со скоростью состава на горизонтальном участке: $x_m = \frac{v_0}{\omega}$. Время подъема до остановки – это четверть периода колебаний, поэтому $\omega = \frac{\pi}{2T}$, и соответственно $x_m = \frac{2v_0T}{\pi}$, а длина состава $L = \frac{g\sin(\alpha)}{\omega^2} = \frac{4g\sin(\alpha)T^2}{\pi^2}$. Поэтому доля длины состава, оказавшаяся на горке к моменту остановки $k = \frac{x_m}{L} = \frac{\pi v_0}{2gT\sin(\alpha)}$. Для получения численного ответа можно использовалось малость угла $\alpha = 4° = \frac{\pi}{45}$ рад. Тогда $k \approx \frac{45v_0}{2gT} = 0{,}45$.

ОТВЕТ: $k = \frac{\pi v_0}{2gT\sin(\alpha)} \approx 45\%$.

Максимальная оценка: 20 баллов.

Задание 2:

Вопрос: Водяной пар, начальное давление которого равнялось 0,5 атм. при температуре 100˚С, изотермически сжали, уменьшив его объем в три раза. Каким стало его давление? Ответ обосновать.

Задача: В гладком горизонтальном цилиндрическом сосуде между его вертикальной стенкой и подвижным вертикальным поршнем находится $m = 88$ г смеси азота и воды при температуре $t_0 = 100°C$. Наружное давление равно нормальному атмосферному $p_0 \approx 101$ кПа, и смесь занимает объем $V_0 \approx 107{,}4$ л. Смесь медленно охладили до температуры $t_1 = 80°C$, а затем поршень закрепили и продолжили медленное охлаждение. Сколько грамм жидкой воды будет находиться в сосуде при температуре $t_2 = 60°C$? Давление насыщенного водяного пара при этой температуре $p_H(t_2) \approx 20$ кПа. Универсальная газовая постоянная $R \approx 8{,}31$ Дж/(моль·К).

Ответ на вопрос: Водяной пар при такой температуре с хорошей точностью можно считать идеальным газом, поэтому при изотермическом сжатии до начала конденсации его давление растет обратно пропорционально объему, и при уменьшении объема в два раза давление вырастет до 1 атм., что соответствует давлению насыщенного водяного пара при температуре 100˚С. Поэтому при дальнейшем сжатии идет конденсация пара, и вплоть до окончания конденсации давление расти не будет. Итак, после уменьшения объема в три раза давление будет равно 1 атм.

Максимальная оценка: 5 баллов.

Решение задачи: В начальном состоянии сумма парциальных давлений водяного пара и азота равно p_0, поэтому водяной пар в цилиндре не насыщен, и вся вода находится в газообразном состоянии. Количества азота ν_A и воды ν_B удовлетворяют соотношениям:

$$\left\{\begin{matrix} \mu_A\nu_A + \mu_B\nu_B = m \\ \nu_A + \nu_B = \dfrac{p_0V_0}{RT_0} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} \nu_B = \dfrac{\mu_A}{\mu_A - \mu_B}\dfrac{p_0V_0}{RT_0} - \dfrac{m}{\mu_A - \mu_B} \approx 1\,\text{моль} \\ \nu_A = \dfrac{m}{\mu_A - \mu_B} - \dfrac{\mu_B}{\mu_A - \mu_B}\dfrac{p_0V_0}{RT_0} \approx 2{,}5\,\text{моль} \end{matrix}\right. .$$

Медленное охлаждение с подвижным поршнем происходит изобарически. Так как масса газов до начала конденсации не изменяется, парциальное давление водяного пара остается неизменным и равным $p_B = \dfrac{\nu_B}{\nu_A + \nu_B} p_0 \approx 28{,}9$ кПа. Объем смеси уменьшается пропорционально температуре: перед закреплением поршня $V_1 = \dfrac{T_1}{T_0}V_0 \approx 101{,}6$ л. После закрепления поршня охлаждение продолжилось изохорически. Если бы конденсация не началась, то давление водяного пара было бы равно $p_{B2} = \dfrac{T_2}{T_1}\dfrac{\nu_B}{\nu_A + \nu_B} p_0 \approx 27{,}2$ кПа. Но это давление оказалось больше давления насыщенного водяного пара при температуре t_2, что свидетельствует о начале конденсации. Значит, в конечном состоянии водяной пар насыщен, и часть воды действительно находится в жидком состоянии. Начальная масса воды $m_B = \mu_B\nu_B \approx 18$ г, а масса водяного пара в конечном состоянии $m'_B = \dfrac{\mu_B p_H(t_2)V_1}{RT_2} \approx 13{,}2$ г. Значит, масса жидкой воды $m''_B = m_B - m'_B = \dfrac{\mu_A\mu_B}{\mu_A - \mu_B}\dfrac{p_0V_0}{RT_0} - \dfrac{\mu_B m}{\mu_A - \mu_B} - \dfrac{\mu_B p_H(t_2)T_1V_0}{RT_2T_0} \approx 4{,}8$ г. Отметим, что в ходе решения мы пренебрегали объемом образовавшейся воды, и, как видно из ответа, это корректное приближение.

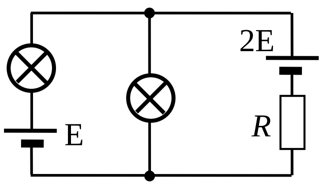
ОТВЕТ: $m''_B = \dfrac{\mu_A\mu_B}{\mu_A - \mu_B}\dfrac{p_0V_0}{RT_0} - \dfrac{\mu_B m}{\mu_A - \mu_B} - \dfrac{\mu_B p_H(t_2)T_1V_0}{RT_2T_0} \approx 4{,}8$ г.

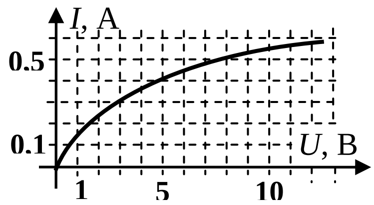
Максимальная оценка: 20 баллов.

Задание 3:

Вопрос: Почему у ламп накаливания связь протекающего через их спираль тока с напряжением, как правило, не соответствует закону Ома (не является линейной)?

Задача: В схеме, показанной на рисунке слева, одинаковые лампы являются нелинейными элементами – их вольтамперная характеристика показана на рисунке справа. Сопротивление резистора $R = 28$ Ом, а $\mathrm{E} = 6$ В. Найти суммарную мощность, потребляемую обеими лампами.

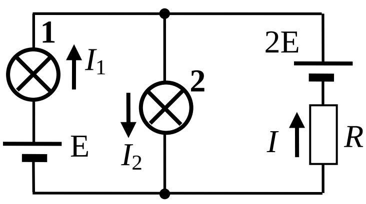


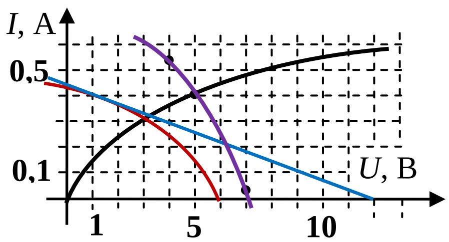


Ответ на вопрос: При протекании тока температура спирали лампы накаливания изменяется очень существенно (изменение порядка 10^3 К), что приводит к изменению сопротивления. Рабочая температура спирали (и соответственно величина ее сопротивления) определяется равновесием между выделением джоулева тепла и потерями на излучение во всех диапазонах, то есть чем больше приложенное напряжение, тем выше равновесная температура, тем больше сопротивление. По этой причине сила тока через спираль растет не прямо пропорционально приложенному напряжению, а существенно медленнее.

Максимальная оценка: 5 баллов.

Решение задачи: Занумеруем лампы «слева направо». Пусть U_2 – напряжение на второй лампе. Положительные направления токов выбраны так, как показано на рисунке справа. Зависимость силы тока через лампу от





напряжения на ней задается некоторой функцией, график которой - это вольтамперная характеристика. Обозначим $I_2 = f(U_2)$. Тогда напряжение на первой лампе $U_1 = \mathrm{E} - U_2$, и поэтому $I_1 = f(\mathrm{E} - U_2)$. Кроме того, по закону Ома для участка цепи с ЭДС $U_2 = 2\mathrm{E} - IR \Rightarrow I = \dfrac{2\mathrm{E} - U_2}{R}$. Учитывая, что по закону непрерывности тока $I_2 = I + I_1$, получим уравнение для U_2: $f(U_2) = \dfrac{2\mathrm{E}}{R} - \dfrac{U_2}{R} + f(\mathrm{E} - U_2)$. Так как функция f задана нам графически, то и решать это уравнение нужно графически. Для этого построим график прямой $I = \dfrac{2\mathrm{E}}{R} - \dfrac{U}{R}$ (голубая линия), график функции $I = f(\mathrm{E} - U)$ (красная линия – он получается путем переноса начальной почки вольтамперной характеристики лампы по оси абсцисс в точку $U = \mathrm{E}$ и «отражением», то есть заменой знака аргумента), и найдем точку пересечения «суммарного» графика (сиреневая линия) с графиком $I = f(U)$ (см. рисунок). Как видно, $U_2 \approx 5$ В и $I_2 \approx 0{,}4$ А. Следовательно, мощность, потребляемая второй лампой $P_2 = U_2 I_2 \approx 2{,}0$ Вт. Поскольку при таком значении напряжения на второй лампе

$U_1 = \mathrm{E} - U_2 \approx 1$В, то в соответствии с вольтамперной характеристикой $I_1 \approx 0{,}14$ А, и $P_1 = U_1 I_1 \approx 0{,}14$ Вт. Итак, суммарная мощность $P = P_1 + P_2 \approx 2{,}14$ Вт.

ОТВЕТ: $P = U_1 I_1 + U_2 I_2 \approx 2{,}14$ Вт, где токи и напряжения определяются графически.

ПРИМЕЧАНИЕ: С учетом ограниченной точности графического решения правильным численным значением ответа считалось любое значение из диапазона $P \approx (2{,}14 \pm 0{,}08)$ Вт.

Максимальная оценка: 20 баллов.

Задание 4:

Вопрос: В каком случае оптическую силу системы из двух тонких линз с общей осью с хорошей точностью можно считать равной сумме оптических сил этих линз? Ответ объяснить.

Задача: Две тонкие линзы расположены на общей оптической оси на расстоянии L друг от друга. На той же оси на таком же расстоянии L от ближайшей из них расположен точечный источник света, лучи от которого последовательно проходят через обе линзы. Если ближе к источнику размещена линза с большей оптической силой, то изображение источника находится на расстоянии $2L$ за дальней линзой. Если, не перемещая источник, переставить линзы, то изображение будет находиться на расстоянии $3L/2$ за дальней линзой. Найти фокусные расстояния обеих линз.

Ответ на вопрос: При выводе формулы для оптической силы тонкой линзы мы считаем толщину линзы малой по сравнению с радиусами кривизны ее поверхностей, чтобы пренебрегать смещением луча вдоль плоскости линзы при прохождении от одной преломляющей поверхности до другой, и при этом оптические силы поверхностей суммируются. Ясно, что для сложения оптических сил четырех преломляющих поверхностей двух линз необходимо такое же пренебрежением смещением лучей. Таким образом, $D_{1+2} \approx D_1 + D_2$, если составная линза тоже является тонкой, то есть полная толщина составной линзы мала по сравнению с радиусами кривизны преломляющих поверхностей.

Максимальная оценка: 5 баллов.

Решение задачи: Пусть линза с большей оптической силой – это «первая» линза с фокусным расстоянием F_1, а фокусное расстояние «второй» линзы равно F_2. Тогда, для первого случая: расстояние от источника до первой линзы равно $a_1 = L$, поэтому расстояние от первой линзы до создаваемого ей изображения источника определяется из формулы линзы $\frac{1}{L} + \frac{1}{b_1} = \frac{1}{F_1} \Rightarrow b_1 = \frac{LF_1}{L - F_1}$. Это изображение является источником для второй линзы, расстояние до которой $a_2 = L - b_1 = \frac{L(L - 2F_1)}{L - F_1}$. При этом расстояние до общего изображения $b_2 = 2L$, поэтому $\frac{L - F_1}{L(L - 2F_1)} + \frac{1}{2L} = \frac{1}{F_2} \Rightarrow \frac{L}{L - 2F_1} = \frac{2(L - F_2)}{F_2}$.

Удобно обозначить $F_1 \equiv xL$, $F_2 \equiv yL$. Тогда полученное уравнение означает, что $1 - 2x = \frac{y}{2(1 - y)} \Rightarrow x = \frac{2 - 3y}{4(1 - y)}$. Для второго случая, действуя аналогично, получим ($F_1 \leftrightarrow F_2$ и $2L \to \frac{3}{2}L$): $\frac{L - F_2}{L(L - 2F_2)} + \frac{2}{3L} = \frac{1}{F_1} \Rightarrow \frac{5L - 7F_2}{L - 2F_2} = \frac{3L}{F_1} \Rightarrow \frac{5 - 7y}{1 - 2y} = \frac{3}{x}$. Подставляя сюда выражение для x, получаем уравнение $y^2 - \frac{7}{3}y + \frac{2}{3} = 0$, корни которого $y_1 = 2$ и $y_2 = \frac{1}{3}$. Соответствующие значения x – это $x_1 = 1$ и $x_2 = \frac{3}{8}$. Условию задачи удовлетворяют только первые корни, так как $\frac{3}{8} > \frac{1}{3}$ – здесь оптическая сила первой линзы оказалась бы меньше, чем у второй. Итак, $F_1 = L$, $F_2 = 2L$.

ОТВЕТ: $F_1 = L$, $F_2 = 2L$.

Максимальная оценка: 20 баллов.

ИТОГО МАКСИМАЛЬНАЯ ОЦЕНКА ЗА РАБОТУ: 100 баллов.