

Время выполнения заданий — 180 минут.

Пишите разборчиво. В работе не должно быть никаких пометок, не относящихся к ответам на вопросы. Если Вы не знаете ответа, ставьте прочерк.

Проверяться будет как сам ответ в бланке, так и черновики, по которым будет восстанавливаться логика получения результата.

Максимальное количество баллов — 100.

Задача 1. В механической системе, схема которой представлена на рис. 1, небольшой брусок массой m лежит на однородном стержне длиной $L = 90$ см. Один из концов стержня шарнирно закреплён. Очень лёгкая подставка, закреплённая на неподвижных электронных весах, служит опорой для стержня. Стержень принимает горизонтальное положение.



рис.1

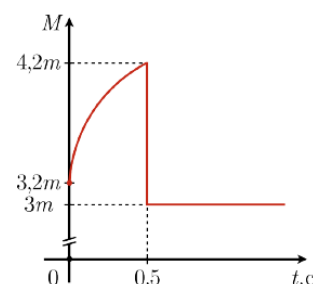


рис.2

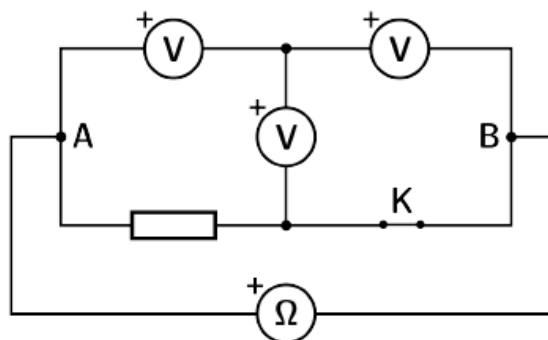
Бруску сообщают начальную скорость вдоль стержня в направлении весов, в результате чего их показания M меняются с течением времени t так, как показано на рис. 2.

- 1) Во сколько раз масса стержня больше массы бруска?
- 2) На каком расстоянии L_1 от шарнира находился брусок в начале опыта?
- 3) С каким ускорением a двигался брусок?
- 4) Какую начальную скорость V_0 сообщили бруску?
- 5) Какую скорость V имел брусок в момент, когда показания весов принимали наибольшее значение?

Коэффициент трения скольжения бруска о стержень составляет $\mu = 0,4$. Считать, что $g = 10$ м/с².

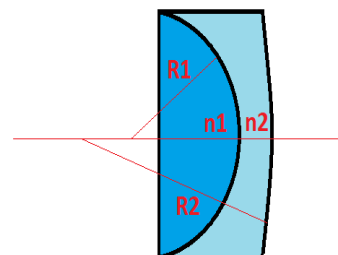
Задача 2. «Правильный» снеговик устроен так, что центры его соприкасающихся шаров располагаются на одной линии, и все шары имеют общую касательную. Александр решил провести «убийство» такого снеговика, состоящего из трёх шаров, «без следов». Для этого он взял большой шар снеговика, растопил и нагрел его до 100°C в кастрюле. После этого он опустил в кастрюлю среднюю часть снеговика, заметив, что после наступления теплового баланса температура уменьшилась до 60°C . Какой станет температура, если к имеющимся «уликаам» добавить верхнюю часть снеговика? Начальная температура снеговика 0°C , удельная теплота плавления снега $\lambda = 330$ Дж/кг, удельная теплоемкость воды $c = 4200$ Дж/°С · кг.

Задача 3. На рисунке представлена схема электрической цепи, состоящей из трёх одинаковых вольтметров, омметра, резистора и ключа K . Сопротивление резистора в два раза больше сопротивления вольтметра. Ключ K замкнут. Омметр показывает $R_0 = 0,96 \text{ МОм}$, а сумма показаний всех вольтметров составляет $V_0 = 0,64 \text{ В}$.



- 1) Определите напряжение V_{AB} между концами A и B омметра.
 - 2) Чему равна сила тока I_0 , протекающего через омметр?
 - 3) Какое сопротивление R имеет вольтметр?
 - 4) Во сколько раз сила тока, протекающего через ключ K , меньше силы тока I_0 , протекающего через омметр?
 - 5) Что покажет омметр, если ключ K разомкнуть?
- Сопротивление соединительных проводов много меньше сопротивления вольтметра.

Задача 4. Для того, чтобы создать ахроматическую линзу, используют две линзы из разных материалов. К плосковыпуклой тонкой линзе с радиусом кривизны R_1 и зависимостью показателя преломления от длины волны проходящего света $n_1(\lambda) = n_{01} + \alpha_1 \cdot (\lambda_k - \lambda)$ вплотную прислоняют вогнуто-выпуклую тонкую линзу с радиусами кривизны R_1 и R_2 и показателем преломления $n_2(\lambda) = n_{02} + \alpha_2 \cdot (\lambda_k - \lambda)$. Определите, при каком значении R_2 данная система будет ахроматической, то есть её фокусное расстояние не будет зависеть от длины световой волны. Какой при этом будет величина фокусного расстояния? $R_1 = 40 \text{ см}$, $n_{01} = 1,805$, $\alpha_1 = 100 \text{ м}^{-1}$, $n_{02} = 1,500$, $\alpha_2 = 150 \text{ м}^{-1}$.



9 класс. Решения.

Каждая задача оценивается в 25 баллов, всего 4 задачи, сумма баллов равна 100. Решение каждой задачи состоит из нескольких шагов, соответствующее разбиение по баллам приведено после решения каждой задачи.

Задача 1. Механика.

Условие (Шилина Полина Васильевна) (25 баллов). В механической системе, схема которой представлена на рис. 1, небольшой брусок массой m лежит на однородном стержне длиной $L = 90$ см. Один из концов стержня шарнирно закреплён. Очень лёгкая подставка, закреплённая на неподвижных электронных весах, служит опорой для стержня. Стержень принимает горизонтальное положение.



рис.1

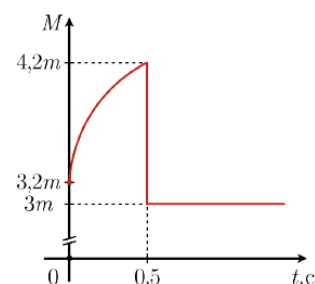


рис.2

Бруску сообщают начальную скорость вдоль стержня в направлении весов, в результате чего их показания M меняются с течением времени t так, как показано на рис. 2.

- 1) Во сколько раз масса стержня больше массы бруска?
- 2) На каком расстоянии L_1 от шарнира находился брусок в начале опыта?
- 3) С каким ускорением a двигался брусок?
- 4) Какую начальную скорость V_0 сообщили бруску?
- 5) Какую скорость V имел брусок в момент, когда показания весов принимали наибольшее значение?

Коэффициент трения скольжения бруска о стержень составляет $\mu = 0,4$. Считать, что $g = 10$ м/с².

Ответы:

- 1) в 5 раз;
- 2) $L_1 = L/6 = 15$ см;
- 3) $a = \mu \cdot g = 4$ м/с²;
- 4) $V_0 = 5L/6\tau + \mu \cdot g \cdot \tau/2 = 2,5$ м/с, где $\tau = 0,5$ с – время скольжения бруска по стержню;
- 5) $V = 5L/6\tau - \mu \cdot g \cdot \tau/2 = 0,5$ м/с.

Решение:

1) Из второго закона Ньютона для бруска следует, что его ускорение составляет $a = \mu \cdot g = 4 \text{ м/с}^2$. Брусок движется равноускоренно по стержню, поэтому расстояние от шарнира до бруска квадратично зависит от времени t . Это мы видим на графике в виде участка параболы. Пусть $\tau = 0,5 \text{ с}$. Поскольку показания M весов скачкообразно падают до постоянного значения $3m$ в момент $t = \tau$, то брусок не останавливается на стержне, а покидает его со скоростью $V = V_0 - \mu \cdot g \cdot \tau$.

2) Правило моментов для стержня относительно шарнира в момент, когда $M = 3,2m$ имеет вид: $m \cdot g \cdot L_1 + m_p \cdot g \cdot L/2 = 3,2 \cdot m \cdot g \cdot L_2$, где m_p – масса рычага, L_2 – расстояние от шарнира до опоры.

3) Правило моментов для стержня относительно шарнира в момент, когда $M = 4,2m$ имеет вид: $m \cdot g \cdot L + m_p \cdot g \cdot L/2 = 4,2m \cdot g \cdot L_2$.

4) Правило моментов для стержня относительно шарнира в момент, когда $M = 3m$ имеет вид: $m_p \cdot g \cdot L/2 = 3m \cdot g \cdot L_2$.

5) Решая систему трёх уравнений, получаем ответы на первые два вопроса: $L_1 = L/6 = 15 \text{ см}$ и $m_p = 5m$.

6) Из кинематики равноускоренного движения следует, что

$L - L_1 = V_0 \cdot \tau - (1/2)\mu \cdot g \cdot \tau^2$, откуда получаем ответ на четвёртый вопрос:

$$V_0 = 5L/6\tau + \mu \cdot g \cdot \tau/2 = 2,5 \text{ м/с.}$$

7) Из соотношения $V = V_0 - \mu \cdot g \cdot \tau$ получаем ответ на пятый вопрос:

$$V = 5L/6\tau - \mu \cdot g \cdot \tau/2 = 0,5 \text{ м/с.}$$

Разбалловка:

Записано условие равновесия в момент, когда $M = 3,2m$	2 балла
Записано условие равновесия в момент, когда $M = 4,2m$	2 балла
Записано условие равновесия в момент, когда $M = 3m$	2 балла
Записано то, что время скольжения бруска по стержню составляет $\tau = 0,5 \text{ с}$	1 балл
Ответ на первый вопрос	3 балла
Ответ на второй вопрос	3 балла
Ответ на третий вопрос	2 балла
Ответ на четвёртый вопрос	3 балла
Ответ на пятый вопрос	2 балла

Задача 2. Термодинамика

Задача 3 (Лужнов Алексей Сергеевич) (25 баллов). «Правильный» снеговик устроен так, что центры его соприкасающихся шаров располагаются на одной линии, и все шары имеют общую касательную. Александр решил провести «убийство» такого снеговика, состоящего из трёх шаров, «без следов». Для этого он взял больший шар снеговика, растопил и нагрел его до 100°C в кастрюле. После этого он опустил в кастрюлю среднюю часть снеговика, заметив, что после наступления теплового баланса температура уменьшилась до 60°C . Какой станет температура, если к имеющимся «уликам» добавить верхнюю часть снеговика? Начальная температура снеговика 0°C , удельная теплота плавления снега $\lambda = 330 \text{ Дж/кг}$, удельная теплоемкость воды $c = 4200 \text{ Дж/}^{\circ}\text{C} \cdot \text{кг}$.

Решение. Для начала рассмотрим геометрическую задачу про подобные треугольники, обозначив h расстояние от верхней окружности до точки пересечения оси симметрии и касательной:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{h + R_1}{h + 2R_1 + R_2} \quad (1)$$

$$\frac{R_2}{R_3} = \frac{h + 2R_1 + R_2}{h + 2R_1 + 2R_2 + R_3} \quad (2)$$

Решая данную систему, мы можем получить соотношение:

$$R_1 : R_2 = R_2 : R_3 \quad (3)$$

Теперь запишем уравнение теплового баланса большей и средней части снеговика:

$$m_3 c (t_k - t_1) = m_2 c (t_k - 0) + m_2 \lambda \quad (4)$$

$$\frac{m_3}{m_2} = \frac{ct_1 + \lambda}{c(t_k - t_1)} = \left(\frac{r_3}{r_2}\right)^3 = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^3 = k = 3,46 \quad (5)$$

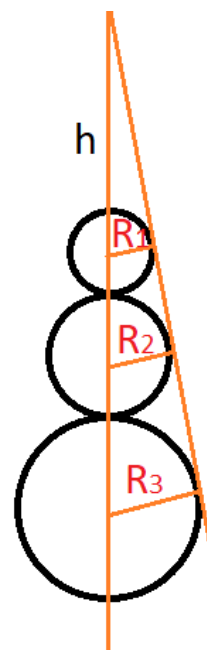
И запишем уравнение теплового баланса всего снеговика:

$$(m_3 + m_2)c(t_1 - t_2) = m_1 c(t_2 - 0) + m_1 \lambda \quad (6)$$

В результате приходим к окончательному ответу

$$t_2 = \frac{(m_3 + m_2)ct_1 - m_1 \lambda}{(m_3 + m_2 + m_1)c} = \frac{(k^2 + k)ct_1 - \lambda}{(k^2 + k + 1)c} = 51,6^{\circ}\text{C} \quad (7)$$

Как видно, температура при данном расчёте оказалась положительной, так что данный расчёт самосогласован.



Разбалловка.

Записано уравнение теплового баланса для нижней и средней части снеговика	5 баллов
Определены отношения геометрических размеров частей снеговика	5 баллов
Записано уравнение теплового баланса для всего снеговика	5 баллов
Обоснованно получена температура теплового баланса всего снеговика	10 баллов

Задача 3. Электроцепи

Условие (Шилина Полина Васильевна) (25 баллов). На рисунке представлена схема электрической цепи, состоящей из трёх одинаковых вольтметров, омметра, резистора и ключа K . Сопротивление резистора в два раза больше сопротивления вольтметра. Ключ K замкнут. Омметр показывает $R_0 = 0,96 \text{ МОм}$, а сумма показаний всех вольтметров составляет $V_0 = 0,64 \text{ В}$.

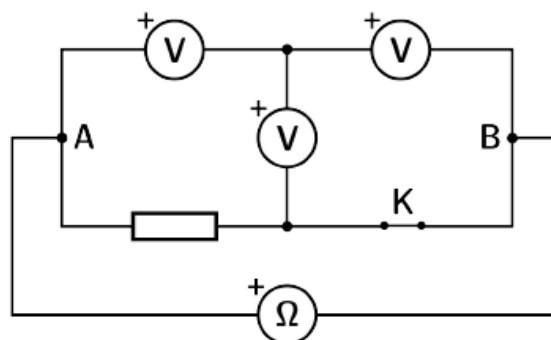
- 1) Определите напряжение V_{AB} между концами A и B омметра.
 - 2) Чему равна сила тока I_0 , протекающего через омметр?
 - 3) Какое сопротивление R имеет вольтметр?
 - 4) Во сколько раз сила тока, протекающего через ключ K , меньше силы тока I_0 , протекающего через омметр?
 - 5) Что покажет омметр, если ключ K разомкнуть?
- Сопротивление соединительных проводов много меньше сопротивления вольтметра.

Ответы:

- 1) $U_{AB} = 3/4 U_0 = 0,48 \text{ В}$;
- 2) $I_0 = U_{AB}/R_0 = 3U_0/(4R_0) = 0,5 \text{ мкА}$;
- 3) $R = 7/6 R_0 = 1,12 \text{ МОм}$;
- 4) в 1,4 раза;
- 5) омметр покажет $R_x = 49/24 R_0 = 1,96 \text{ МОм}$.

Решение:

1) Центральный и правый вольтметр соединены параллельно, поэтому их показания совпадают. Обозначим их буквой U . Сопротивления вольтметров одинаковы и равны R . Через центральный и правый вольтметры будет протекать одинаковый ток $I = U/R$. По закону сохранения заряда через левый вольтметр будет протекать ток $2I$, поэтому левый вольтметр покажет напряжение $2U$. По условию $U + U + 2U = U_0$, откуда $U = U_0/4$. Напряжение между клеммами омметра равно сумме показаний левого и



правого вольтметров. Выходит, что $U_{AB} = 2U + U = 3U = 3U_0/4 = 0,48 \text{ В}$.

2) Омметр показывает значение $R_0 = U_{AB}/I_0$, поэтому $I_0 = U_{AB}/R_0 = 3U_0/(4R_0) = 0,5 \text{ мкА}$.

3) Напряжение на резисторе равно сумме показаний левого и центрального вольтметров, то есть $3U$, поэтому через резистор протекает ток $3U/(2R) = 1,5I$. По закону сохранения заряда $I_0 = 2I + 1,5I = 3,5I$, поэтому $I = 2I_0/7$. Поскольку $U = U_0/4$ и $I = 2I_0/7$, то $R = U/I = 7U_0/(8I_0) = 7R_0/6 = 1,12 \text{ МОм}$.

4) По закону сохранения заряда через ключ протекает ток $IK = 1,5I + I = 2,5I$. Видно, что $I_0/IK = 3,5I/(2,5I) = 7/5 = 1,4$ раза.

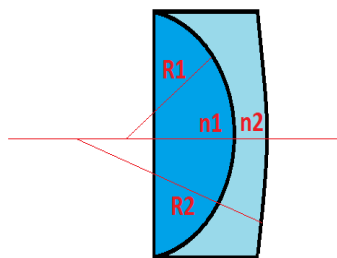
5) После размыкания ключа K цепь будет выглядеть как набор последовательно и параллельно соединённых резисторов. По соответствующим правилам для таких соединений: $R_x = 7R/4$, поэтому $R_x = 49/24R_0 = 1,96 \text{ МОм}$.

Разбалловка:

Есть понимание, что показания центрального и правого вольтметров совпадают	1 балл
Ответ на первый вопрос	3 балла
Ответ на второй вопрос	3 балла
Ответ на третий вопрос	5 баллов
Ответ на четвертый вопрос	4 балла
Показано, что новые показания омметра составляют $R_x = 7R/4$	2 балла
Ответ на пятый вопрос	2 балла

Задача 4. Оптика

Условие (Лужнов Алексей Сергеевич) (25 баллов). Для того, чтобы создать ахроматическую линзу, используют две линзы из разных материалов. К плосковыпуклой тонкой линзе с радиусом кривизны R_1 и зависимостью показателя преломления от длины волны проходящего света $n_1(\lambda) = n_{01} + \alpha_1 \cdot (\lambda_k - \lambda)$ вплотную прислоняют вогнуто-выпуклую тонкую линзу с радиусами кривизны R_1 и R_2 и показателем преломления $n_2(\lambda) = n_{02} + \alpha_2 \cdot (\lambda_k - \lambda)$. Определите, при каком значении R_2 данная система будет ахроматической, то есть её фокусное расстояние не будет зависеть от длины световой волны. Какой при этом будет величина фокусного расстояния? $R_1 = 40 \text{ см}$, $n_{01} = 1,805$, $\alpha_1 = 100 \text{ м}^{-1}$, $n_{02} = 1,500$, $\alpha_2 = 150 \text{ м}^{-1}$.



Решение. Обозначим фокусные расстояния первой и второй линз F_1 и F_2 . Согласно формуле линзы, они равны

$$\frac{1}{F_1} = (n_{01} + \alpha_1(\lambda_k - \lambda) - 1) \frac{1}{R_1} \tag{1}$$

$$\frac{1}{F_2} = (n_{02} + \alpha_2(\lambda_k - \lambda) - 1) \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) \tag{2}$$

Фокусное расстояние составной системы линз F определяется уравнением

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{F_1} + \frac{1}{F_2} \quad (3)$$

Складывая (1) и (2), заключаем, что фокусное расстояние составной системы (3) не зависит от длины волны, если

$$\frac{\alpha_1(\lambda_k - \lambda)}{R_1} + \alpha_2(\lambda_k - \lambda) \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) = 0,$$

то есть когда

$$R_2 = \frac{\alpha_2}{\alpha_2 - \alpha_1} R_1 = 120 \text{ см.}$$

В частности, если материалы линз одинаковы, то мы приходим к тому, что R_2 должно быть неограниченно большим. Это означает, что задняя поверхность линзы является плоской, и оптическая сила у такой линзы отсутствует. Если же материалы разные, то

$$\frac{1}{F} = \frac{n_{01} - 1}{R_1} - \frac{\alpha_1 n_{02} - 1}{\alpha_2 R_1} = \frac{1}{85} \text{ см}^{-1}$$

$$F = 85 \text{ см.}$$

Разбалловка.

Записана формула линзы	5 баллов
Записано правила сложения диоптрий рядом стоящих линз	5 баллов
Определено условие, при котором фокус системы не зависит от длины волны	5 баллов
Определён радиус R_2	5 баллов
Определено фокусное расстояние системы	5 баллов