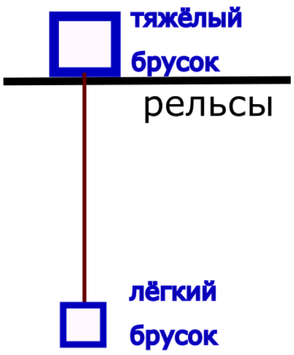
Время выполнения заданий — 180 минут.

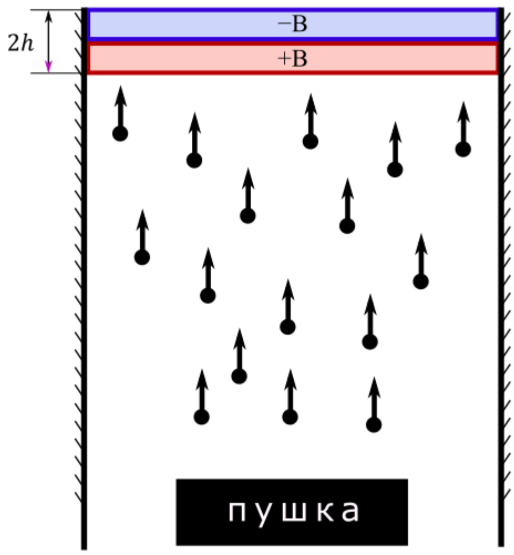
Пишите разборчиво. В работе не должно быть никаких пометок, не относящихся к ответам на вопросы. Если Вы не знаете ответа, ставьте прочерк.
Проверяться будет как сам ответ в бланке, так и черновики, по которым будет восстанавливаться логика получения результата.

Максимальное количество баллов — 100.



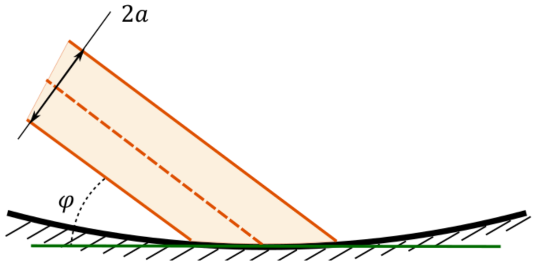
Задача 1. Брусок может без трения скользить по рельсам. К нему привязана нерастяжимая невесомая нить, которая проходит между рельсами не касаясь их. С другого конца к ней привязан второй брусок массы в два раза меньшей, чем первый. Подвешенный брусок отклонили на небольшой угол и измерили частоту колебаний. Затем бруски поменяли местами. Как изменилась частота колебаний?

Задача 2. На входе прямого канала с прямоугольным поперечным сечением расположена пушка, испускающая частицы с массой m и зарядом q. На выходе канала расположены две плоские, одинаковые, приставленные друг к другу магнитные катушки с противоположными токами, как показано на рисунке. Толщина каждой из катушек равна h, магнитное поле внутри катушек направлено ортогонально плоскости рисунка и по модулю равно B. В этих катушках плотность проводов обмотки мала, так что можно считать, что частицы, летящие из канала, не замечают проводов. Концентрация выброшенных пушкой частиц, подлетающих к магнитному полю, равна n, а их скорость направлена вдоль канала и равна u. За катушками находится вакуум. Найдите давление, с которым частицы действуют на систему двух катушек. Считайте, что концентрация частиц мала, поэтому их взаимодействием друг с другом можно пренебречь.



Задача 3. Полый цилиндр радиуса b имеет толщину стенок h, малую по сравнению с его радиусом, и изготовлен из металла с удельным сопротивлением ρ. В некоторый момент времени внешние токи начинают создавать однородное магнитное поле B, сонаправленное с осью цилиндра. Амплитуда поля увеличивается линейно со временем t, так что $B = \alpha t$, параметр α известен. Высота цилиндра велика по сравнению с его радиусом. Найдите магнитное поле внутри цилиндра на временах когда ток, текущий по поверхности проводящего цилиндра, уже можно считать установившимся.

Задача 4. На участок цилиндрического вогнутого зеркала радиуса R падает под малым углом φ к касательной плоскости, проведённой к цилиндру в точке падения пучка, параллельный пучок света, имеющий круговое поперечное сечение радиуса a, см. Рисунок. Известно, что в области засветки поверхность зеркала меняет свой наклон на угол, малый по сравнению с углом падения φ. Отражённый пучок наблюдается на экране, который расположен ортогонально отражённому центральному лучу в пучке. На каком расстоянии от точки отражения следует расположить экран, чтобы изображение пучка выглядело как линия, параллельная образующей цилиндрического зеркала?

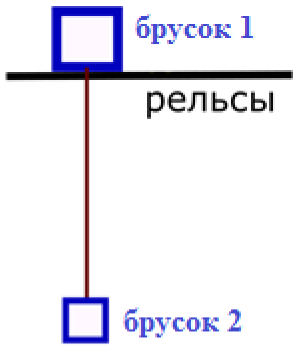


11 класс. Решения.

Каждая задача оценивается в 25 баллов, всего 4 задачи, сумма баллов равна 100. Решение каждой задачи состоит из нескольких шагов, соответствующее разбиение по баллам приведено после решения каждой задачи.

Задача 1. Механика.

Условие (Шилина Полина Васильевна, Вергелес Сергей Сергеевич) (25 баллов). Брусок может без трения скользить по рельсам. К нему привязана нерастяжимая невесомая нить, которая проходит между рельсами не касаясь их. С другого конца к ней привязан второй брусок массы в два раза меньшей, чем первый. Подвешенный брусок отклонили на небольшой угол и измерили частоту колебаний. Затем бруски поменяли местами. Как изменилась частота колебаний?



Решение: К системе брусок 1+брусок 2 не приложена внешняя сила вдоль рельс. Поэтому проекция положения центра тяжести этой системы на направление вдоль рельс двигается равномерно и прямолинейно. Будем двигаться вдоль рельс со скоростью, равной проекции скорости центра масс, тогда в нашей системе отсчёта центр масс по горизонтали будет покоится. В выбранной системе координат он будет лишь совершать малые колебания по вертикали.

Центр масс находится в точке, которая делит нить как 1:2, если считать от верхнего тяжелого бруска 1. Пусть длина нити равна l. Тогда лёгкий брусок 2 совершает колебания, как если бы длина нити, на которой он подвешен, была бы равна $2l/3$. Таким образом, частота колебаний груза равна

$$\omega_1 = \sqrt{3g/2l}. \quad (1)$$

К этому же результату можно прийти, если рассмотреть соотношение потенциальной и кинетической энергий в процессе колебаний. Пусть φ – угол, на который отклонилась нить. Скорости движений по горизонтали бруска 1 и бруска 2 по горизонтали равны соответственно $l\dot{\varphi}/3$ и $2l\dot{\varphi}/3$, суммарная кинетическая энергия этого движения равна

$$T = \frac{m}{2}(l\dot{\varphi}/3)^2 + \frac{m}{2\cdot 2}(2l\dot{\varphi}/3)^2 = \frac{m}{6}(l\dot{\varphi})^2.$$

где m – масса бруска 1. Потенциальная энергия такая же, как для обычного маятника, она равна

$$\Pi = \frac{mgl(\varphi)^2}{2\cdot 2}.$$

Сравнивая коэффициенты при $\dot{\varphi}^2$ в кинетической энергии и при φ^2 в потенциальной энергии, приходим к тому же ответу (1).

Во втором эксперименте длина маятника для подвешенного тяжёлого бруска 1 равна $l/3$, поэтому

$$\omega_2 = \sqrt{3g/l}.$$

Таким образом,

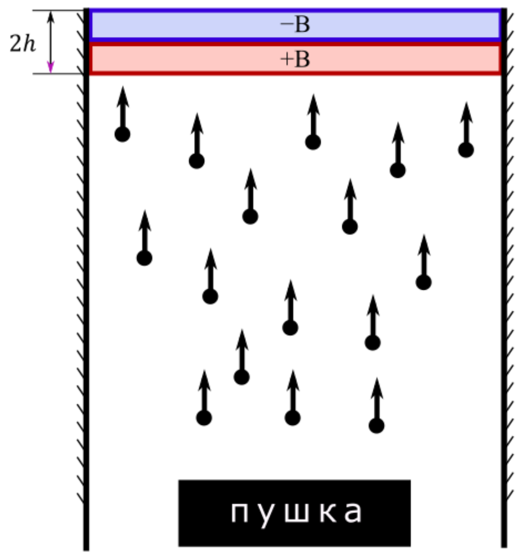
$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \sqrt{2}.$$

Разбалловка.

Явно указан переход в систему отсчёта центра масс, или в решении такое предположение не требуется	2 балла
Записаны уравнения, или сделаны замечания, позволяющие вычислить частоту в первом случае	4 балла
Правильно получена первая частота	5 баллов
Записаны уравнения, или сделаны замечания, позволяющие вычислить частоту в первом случае	4 балла
Правильно получена вторая частота	10 баллов

Задача 2. Термодинамика - МКТ

Условие (Вергелес Сергей Сергеевич) (25 баллов).



На входе прямого канала с прямоугольным поперечным сечением расположена пушка, испускающая частицы с массой m и зарядом q. На выходе канала расположены две плоские, одинаковые, приставленные друг к другу магнитные катушки с противоположными токами, как показано на рисунке. Толщина каждой из катушек равна h, магнитное поле внутри катушек направлено ортогонально плоскости рисунка и по модулю равно B. В этих катушках плотность проводов обмотки мала, так что можно считать, что частицы, летящие из канала, не замечают проводов. Концентрация выброшенных пушкой частиц, подлетающих к магнитному полю, равна n, а их скорость направлена вдоль канала и равна u. За катушками находится вакуум. Найдите давление, с которым частицы действуют на систему двух катушек. Считайте, что концентрация частиц мала, поэтому их взаимодействием друг с другом можно пренебречь.

Решение. Частица, влетая в область первой катушки, начинает двигаться по окружности под действием силы Лоренца, действующей со стороны магнитного поля. Сила Лоренца равна $F = quB$, в данном случае она является центростремительной силой, то есть

$$F = quB = \frac{mu^2}{\xi},$$

где ξ – радиус орбиты частицы. Находим, что он равен

$$\xi = \frac{mu}{qB}.$$

Если толщина катушки h больше, чем максимально возможный радиус орбиты частицы ξ, $\xi < h$, то все частицы, совершив полукруг в первой катушке, вылетают обратно в объём, занимаемый газом. В этом случае импульс dp_u, переданный катушке за время dt на единицу площади dS от частиц со скоростью u, равен

$$dp_u \;=\; 2mu \cdot n \cdot dS \cdot (u \cdot dt)$$

Величина $dS \cdot (u \cdot dt)$ есть элемент объёма, из которого частицы, имеющие скорость u, успеют долететь до катушки за время dt. В частности, $(u \cdot dt)$ есть размер этого объёма в ортогональном стенке направлении. Давление, производимое газом, равно

$$P = \frac{dp}{dS \cdot dt} = 2nmu^2, \qquad h > \frac{mu}{qB}.$$

Если же радиус орбиты частицы в магнитном поле больше толщины катушки, $\xi > h$, то частицы, двигаясь по окружности, достигнут задней границы первой катушки и влетят в область второй катушки. Поскольку там поле направлено в противоположную сторону, то частицы, двигаясь по окружности с тем же радиусом ξ, но заворачивая в противоположную сторону, достигнут внешней границы второй катушки с исходной скоростью u. В результате такие частицы не передадут системе из двух катушек какого-либо импульса. Пороговая скорость u_* определяется из условия $\xi_* = h$, то есть

$$\xi_* = h, \qquad u_* = \frac{qBh}{m}.$$

В результате получим:

$$P = 0, \qquad h < \frac{mu}{qB}.$$

Разбалловка.

Явно указана необходимость рассмотрения двух возможных диапазонов параметров	5 баллов
Явно найден пороговый параметр	5 баллов
Найдено давление в одном случае	5 баллов
Найдены давления в обоих случаях	10 баллов

Задача 3. Электричество и магнетизм.

Задача 3 (Вергелес Сергей Сергеевич) (25 баллов). Полый цилиндр радиуса b имеет толщину стенок h, малую по сравнению с его радиусом, и изготовлен из металла с удельным сопротивлением ρ. В некоторый момент времени на цилиндр начинает действовать однородное магнитное поле B, сонаправленное с осью цилиндра, амплитуда которого увеличивается линейно со временем t, так что $B = \alpha t$, параметр α известен. Высота цилиндра велика по сравнению с его радиусом. Найдите магнитное поле внутри цилиндра на временах когда ток, текущий по поверхности проводящего цилиндра, уже можно считать установившимся.

Решение. Составим эквивалентную цепь, чтобы рассчитать поверхностную плотность тока, текущего по цилиндру. Знание тока позволит нам рассчитать магнитное поле внутри цилиндра.

Проводящий цилиндр можно представить как провод в виде намотки катушки индуктивности, имеющий N витков. Длина такого провода равна $2\pi Nb$, его поперечное сечение представляет собой прямоугольник со сторонами h и $\zeta = l/N$, где l – высота цилиндра. По получившейся катушке протекает ток I. Индуктивность такой катушки

$$L = \frac{\mu_0 N^2 S}{l},$$

где $S = \pi b^2$. Сопротивление катушки (провода)

$$R = \frac{2\pi b N}{\zeta \cdot h} \cdot \rho = \frac{N^2 2\pi b \rho}{lh}.$$

Через катушку проходит поток, равный $\Phi_{ext} = NSB$. Уравнение на ток в катушке

$$L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + RI = -\frac{\mathrm{d}\Phi_{ext}}{\mathrm{d}t}.$$

Если ток уже установился, это означает, что первым слагаемым в левой части уравнения можно пренебречь. Тогда ток

$$I = -\frac{NS}{R}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}.$$

Магнитное поле внутри цилиндра

$$B_b = \frac{LI}{NS} + B = \alpha(t - t_0), \quad t_0 = \frac{\mu_0 bh}{2\rho}.$$

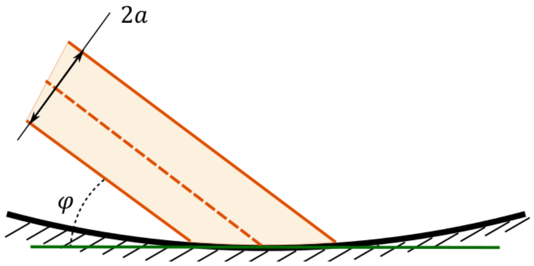
Разбалловка.

Описана идея вычисления поля внутри цилиндра	5 баллов
Записано уравнение на ток, текущий по цилиндру	5 баллов

Явно учтено, что ток установившийся	3 балла
Найдено поле внутри цилиндра	12 баллов

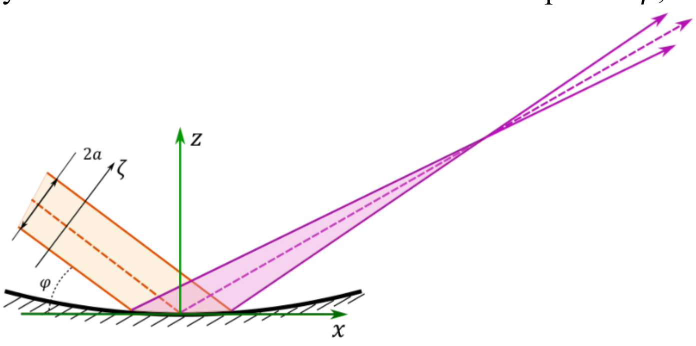
Задача 4. Оптика

Условие (Вергелес Сергей Сергеевич) (25 баллов). На участок цилиндрического вогнутого зеркала радиуса R падает под малым углом φ к касательной плоскости, проведённой к цилиндру в точке падения пучка, параллельный пучок света, имеющий круговое поперечное сечение радиуса a, см. Рисунок. Известно, что в области засветки поверхность зеркала меняет свой наклон на угол, малый по сравнению с углом падения φ. Отражённый пучок наблюдается на экране, который расположен ортогонально отражённому центральному лучу в пучке. На каком расстоянии от точки отражения следует расположить экран, чтобы изображение пучка выглядело как линия, параллельная образующей цилиндрического зеркала?



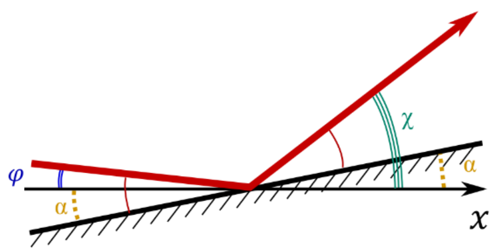
Решение. Введём глобальную систему координат $Oxyz$ как показано на рисунке. Начало осей есть точка отражения центрального луча в пучке. Введём также координату ζ, направленную ортогонально оси падающего пучка в плоскости Oxz, так что прямая $\zeta = 0, y = 0$ соответствует оси падающего пучка.

Поскольку мы имеем дело с участком цилиндрического зеркала, поверхность которого в разных точках имеет разный угол наклона, то установим сначала закон отражения лучей в общем виде в случае наклона отражающей поверхности относительной глобальной горизонтали Ox. Пусть угол падения луча относительно глобальной оси Ox равен φ, и падающий луч распространяется в плоскости Oxz. Если угол наклона отражающей поверхности равен α относительно оси Ox, а ось Oy параллельна поверхности, то угол отражения χ относительно оси Ox равен



$$\chi = \varphi + 2\alpha. \qquad (1)$$

Равенство (1) легко усмотреть из требования равенства углов падения и отражения относительно отражающей поверхности.



Координата x связана с координатой ζ поперёк пучка согласно соотношению

$$x = \frac{\zeta}{\varphi}.$$

Таким образом, координата x изменяется в пределах $-a/\varphi < x < a/\varphi$. В этих подсчётах мы полагали, что поверхность зеркала можно считать в главном приближении плоской. Для того, чтобы найти локальную ориентацию поверхности, учтём кривизну зеркала. Получим, что

$$\alpha = \frac{x}{R}.$$

Теперь можно приступить к ответу на поставленный вопрос. Крайние лучи сойдутся по вертикальному направлению (по направлению Oz) на расстоянии X, которое определяется условием

$$X = \frac{2a}{\chi(\zeta = a) - \chi(\zeta = -a)} = \frac{R\varphi}{2}. \qquad (2)$$

Согласно условию, угол изменения наклона зеркальной поверхности на расстоянии засветки мал по сравнению с углом падения, то есть

$$\frac{a/\varphi}{R} \ll \varphi.$$

Это условие эквивалентно тому, что расстояние X велико по сравнению с размером засветки, $X \gg a/\varphi$. Это неравенство оправдывает то, что при геометрическом расчёте, приведшем к формуле (2), мы как раз пренебрегли расстоянием a/φ, которое есть разница хода двух крайних лучей до момента пересечения.

Разбалловка.

Показано, каким образом лучи образуют линию на экране (объяснены используемые приближения)	2 балла
Найдена протяжённость пятна света на зеркале	3 балла
Указано, как зависит наклон части зеркала в зависимости от рассматриваемой точки падения луча	3 балла
Найдено, под какими углами отражаются крайние лучи в пучке	7 баллов
Правильно получен ответ	10 баллов