

Время выполнения заданий — 240 минут.

Пишите разборчиво. В работе не должно быть никаких пометок, не относящихся к ответам на вопросы. Если Вы не знаете ответа, ставьте прочерк.

Проверяться будет как сам ответ в бланке, так и черновики, по которым будет восстанавливаться логика получения результата.

Максимальное количество баллов — 100.

Задача 1. Максимальная разрешенная скорость автомобиля на кольцевой автодороге составляет 90 км/ч. На дороге через каждый километр расположены светофоры. Время, в течение которого горит красный свет светофора, равно времени, когда горит зеленый свет, и составляет 50 с. Светофоры зажигаются одновременно. Известно, что при отсутствии пробок и при движении со скоростью 72 км/ч автомобиль, начавший движение на зеленый свет, может проехать с той же скоростью всю автодорогу за полчаса, не притормаживая на светофорах. В целях борьбы с пробками в часы пик было принято решение увеличить время, когда горит зеленый сигнал светофора, в два раза, оставив время красного сигнала прежним. Как изменится кратчайшее время проезда полного кольца автодороги без нарушения правил? Считайте, что автомобиль может изменять скорость мгновенно.

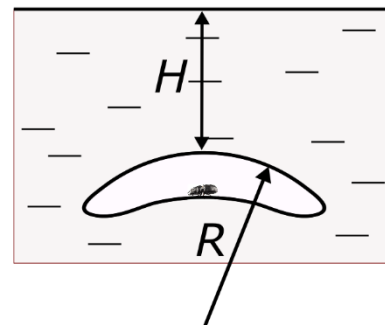
Задача 2. Теплопроводность ограждения измеряется в $\text{Вт}/(\text{м}^2 \cdot ^\circ\text{C})$, и определяет, какая мощность передаётся через 1 м^2 ограждения, если разность температур воздуха по обе стороны от него различаются на $1 ^\circ\text{C}$. Дан дом, боковая поверхность которого равна 500 м^2 , 10% которой составляют окна, а поверхность крыши равна пятой части боковой поверхности. Теплопроводность внешних стен дома равна $0.33 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot ^\circ\text{C})$, окон $2 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot ^\circ\text{C})$, а крыши – $0.25 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot ^\circ\text{C})$.

1. Какую мощность надо тратить на обогрев дома в январе, чтобы поддерживать внутри всего дома температуру $25 ^\circ\text{C}$ при внешней температуре $-15 ^\circ\text{C}$?
2. Стены изнутри дома утеплили твёрдым пенопластом, теплопроводность которого равна $1 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot ^\circ\text{C})$. На сколько сократилась требуемая мощность?

Задача 3. Полезная нагрузка включена последовательно с паразитным сопротивлением r и источником напряжения в цепь постоянного тока. Полезная нагрузка состоит из двух параллельно включенных сопротивлений, каждое из которых моделирует работающий завод. На этапе строительства этой системы электроснабжения хозяева заводов договорились, что их заводы будут потреблять одинаковую максимально возможную мощность, причём напряжение на источнике питания должно было равняться U . В процессе эксплуатации один из хозяев в корыстных целях в тайне от компаньона решил изменить сопротивление своего завода так, чтобы потреблять максимально возможную мощность. Введённый в эксплуатацию источник питания при изменении нагрузки изменяет напряжение, сохраняя выдаваемую мощность.

1. Чему равны потребляемые мощности каждого завода до одностороннего изменения параметров одного из них?
2. Чему стала равна потребляемая мощность изменившего свои параметры завода и на сколько изменилась суммарная потребляемая мощность обеими заводами?

Задача 4. Только самые маленькие пузыри воздуха остаются почти круглыми в процессе всплывания в воде. Если пузырь воздуха, всплывающий в воде, имеет размеры порядка 10 см, то он принимает аксиально симметричную форму шляпки гриба, см. Рисунок. Жук плавает на нижней поверхности пузыря, перемещаясь вверх вместе со всем пузырём. На какой глубине увидит жука смотрящий на него вертикально сверху, находясь над поверхностью воды? Расстояние от верхней границы пузыря до поверхности воды равно H , радиус кривизны верхней границы пузыря равен R , коэффициент преломления воды $n = 4/3$. Размеры жука малы по сравнению с расстоянием h от него до верхней границы пузыря.



1. Пренебрегите тем, что верхняя поверхность пузыря не плоская, а изогнутая. На какой глубине тогда увидит жука наблюдатель, находящийся над водой?
2. Примите во внимание кривизну верхней поверхности пузыря и получите полный ответ.

Задача 5. Герои романа Жюль Верна «Потерянный остров» после крушения воздушного шара оказались на необитаемом острове. У них была последняя спичка и они разожгли огонь. Однако, после затопления их жилища огонь погас. Инженер Сайрес смог опять разжечь огонь, используя линзу, сделанную из стекол от двух часов, которую он заполнил водой. Оцените, какое время понадобилось ему чтобы зажечь трут (мох), если мощность солнечного излучения равна приблизительно 700 Вт/м^2 , плотность мха примерно 100 кг/м^3 , теплоемкость $2000 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{°C)}$, температура воспламенения около 70 °C .

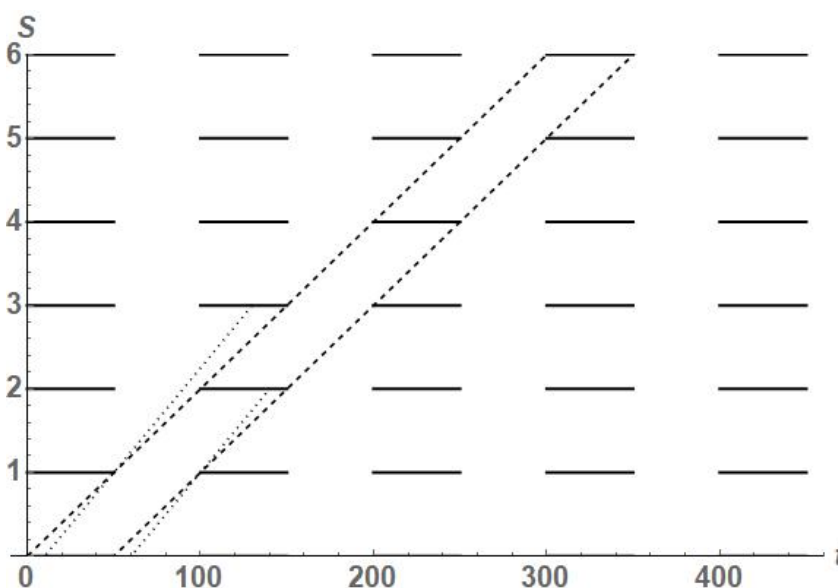
9 класс. Решения.

Предложение оценки: каждая задача оценивается в 20 баллов, всего 5 задач, сумма баллов равна 100. Решение каждой задачи состоит из нескольких шагов, соответствующее разбиение по баллам приведено после решения каждой задачи; разбалловка приведена из расчёта 20 баллов на задачу.

Задача 1. Механика.

Условие (Ковалёва Маргарита Алексеевна). Максимальная разрешенная скорость автомобиля на кольцевой автодороге составляет 90 км/ч. На дороге через каждый километр расположены светофоры. Время, в течение которого горит красный свет светофора, равно времени, когда горит зеленый свет, и составляет 50 с. Светофоры зажигаются одновременно. Известно, что при отсутствии пробок и при движении со скоростью 72 км/ч автомобиль, начавший движение на зеленый свет, может проехать с той же скоростью всю автодорогу за полчаса, не притормаживая на светофорах. В целях борьбы с пробками в часы пик, было принято решение увеличить время, когда горит зеленый сигнал светофора, в два раза, оставив время красного сигнала прежним. Как изменится кратчайшее время проезда полного кольца автодороги без нарушения правил? Считайте, что автомобиль может изменять скорость мгновенно.

Решение: На координатной плоскости введем две оси – ось времени и ось расстояний. Обозначим на этой плоскости перекрытые светофоры (красный свет) черными сплошными отрезками на плоскости.



Штриховыми линиями обозначим движение автомобиля со скоростью 72 км/ч без остановки на светофорах. Общая длина кольцевой дороги составляет

$$L=72 \text{ км/ч} \cdot 0,5 \text{ ч} = 36 \text{ км.}$$

Посчитаем, какое наименьшее время нужно для того, чтобы проехать всю дорогу по кругу. Заметим, что график движения автомобиля повторяется каждые 2 км. Если автомобиль стартует не в тот момент, когда только зажегся зеленый сигнал, а немного позже, то он может нагнать его до следующего светофора если едет с максимальной разрешенной скоростью 90 км/ч. Тогда экономия времени составит

$$\frac{1 \text{ км}}{72 \text{ км/ч}} - \frac{1 \text{ км}}{90 \text{ км/ч}} = 50 \text{ с} - 40 \text{ с} = 10 \text{ с}$$

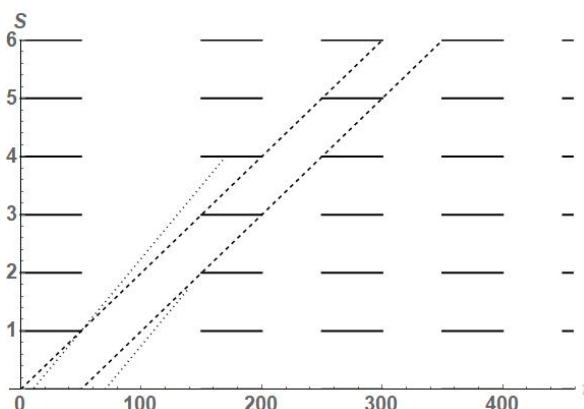
Если же за два километра до конца полного круга шофер поедет со скоростью 90 вместо 72, то замкнет круг он быстрее на

$$\frac{2 \text{ км}}{72 \text{ км/ч}} - \frac{2 \text{ км}}{90 \text{ км/ч}} = 100 \text{ с} - 80 \text{ с} = 20 \text{ с}$$

Итого: при исходной конфигурации светофоров наименьшее время, за которое машина пройдет полный круг, будет равно

$$30 \text{ мин} - 10 \text{ с} - 20 \text{ с} = 29 \text{ мин } 30 \text{ с.}$$

Если мы увеличим время, которое горит зеленый свет, то схема изменится согласно рисунку:



Эта схема показывает, что скорость, при которой получается проехать, не притормаживая на светофорах, осталась той же. График повторяет себя каждые 3 километра. Тогда экономия времени в начале пути:

$$\frac{2 \text{ км}}{72 \text{ км/ч}} - \frac{2 \text{ км}}{90 \text{ км/ч}} = 100 \text{ с} - 80 \text{ с} = 20 \text{ с}$$

И в конце автомобилист может ехать последние 3 км с максимальной скоростью 90 км/ч

$$\frac{3 \text{ км}}{72 \text{ км/ч}} - \frac{3 \text{ км}}{90 \text{ км/ч}} = 150 \text{ с} - 120 \text{ с} = 30 \text{ с}$$

Время же движения по полному кругу составит

30 мин – 20 с – 30 с = 29 мин 10 с,

что на 20 с меньше чем до регулировки светофоров.

Ответ: 20 с

Разбалловка.

Установление параметров движения с постоянной скоростью 72 км/ч до регулировки	3 балла
Установление невозможности движения с большей средней скоростью до регулировки	3 балла
Установление невозможности движения с большей средней скоростью после регулировки	4 балла
Определение способа экономии времени проезда за счёт начала и конца пути	2 балла
Расчёт кратчайшего времени проезда до регулировки светофоров	4 балла
Расчёт кратчайшего времени проезда после регулировки светофоров; получение окончательного ответа	4 балла

Задача 2. Термодинамика.

Условие (Вергелес Сергей Сергеевич) Теплопроводность ограждения измеряется в $\text{Вт}/(\text{м}^2 \cdot ^\circ\text{С})$, и определяет, как мощность передаётся через 1 м^2 ограждения, если разность температур воздуха по обе стороны от него различаются на $1 ^\circ\text{С}$. Дан дом, боковая поверхность которого равна 500 м^2 , 10% которой составляют окна, а поверхность крыши равна пятой части боковой поверхности. Теплопроводность внешних стен дома равна $0.33 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot ^\circ\text{С})$, окон $2 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot ^\circ\text{С})$, а крыши – $0.25 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot ^\circ\text{С})$.

1. Какую мощность надо тратить на обогрев дома в январе, чтобы поддерживать внутри всего дома температуру $25 ^\circ\text{С}$ при внешней температуре $-15 ^\circ\text{С}$?
2. Стены изнутри дома утеплили твёрдым пенопластом, теплопроводность которого равна $1 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot ^\circ\text{С})$. На сколько сократилась требуемая мощность?

Решение. Полная скорость отдачи тепла равна

$$W = (S_{\text{стена}} C_{\text{стена}} + S_{\text{окно}} C_{\text{окно}} + S_{\text{крыша}} C_{\text{крыша}})(T_{\text{внутри}} - T_{\text{снаружи}}) = 11 \text{ кВт}.$$

Утепление стены означает, что разность температур последовательно набирается сначала на внутреннем утеплителе, а затем на стене. При этом поток тепла через оба ограждения является одним и тем же. Легко усмотреть аналогию: теплопроводность является аналогом обратного сопротивления в электрических цепях. Это означает, что для последовательных теплопроводностей работает закон сложения обратных величин:

$$\frac{1}{C_{\text{стена}}^*} = \frac{1}{C_{\text{стена}}} + \frac{1}{C_{\text{утеплитель}}}, \quad C_{\text{стена}}^* = 0.25 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot ^\circ\text{С}).$$

Делая пересчёт, получаем, что мощность отопления дома стала равной $W^* = 9.5$ кВт, то есть сократилась на 1.5 кВт.

Разбалловка.

Найдена скорость отдачи тепла до утепления	7 баллов
Найдена теплопроводность стен после утепления	8 баллов
Найдена скорость отдачи тепла после утепления	5 баллов

Задача 3. Электричество

Условие (Вергелес Сергей Сергеевич). Полезная нагрузка включена последовательно с паразитным сопротивлением r и источником напряжения в цепь постоянного тока. Полезная нагрузка состоит из двух параллельно включенных сопротивлений, каждое из которых моделирует работающий завод. На этапе строительства этой системы электроснабжения хозяева договорились, что их заводы будут потреблять одинаковую максимально возможную мощность, причём напряжение на источнике питания должно было равняться U . В процессе эксплуатации один из хозяев в корыстных целях в тайне от компаньона решил изменить сопротивление своего завода так, чтобы потреблять максимально возможную мощность. Введённый в эксплуатацию источник питания при изменении нагрузки изменяет напряжение, сохраняя выдаваемую мощность.

1. Чему равны потребляемые мощности каждого завода до одностороннего изменения параметров одного из них?
2. Чему стала равна потребляемая мощность изменившего свои параметры завода и на сколько изменилась суммарная потребляемая мощность обеими заводами?

Решение. Пусть сопротивление каждого завода равно $2R_0$, тогда сопротивление полезной нагрузки равно R_0 . Ток I , протекающий через цепь, равен

$$I = \frac{U}{r + R_0}.$$

Поэтому мощность P_0 , выделяющаяся на одном заводе, равна

$$P_0 = 2R_0(I/2)^2 = \frac{R_0/r}{(1 + R_0/r)^2} \frac{rU^2}{2}.$$

Для нахождения максимально возможной потребляемой заводом мощности нам надо найти максимум функции $x/(1+x)^2$, где под x стоит безразмерное сопротивление R_0/r . Не прибегая к технике нахождения максимума по нулю производной, максимум данной функции можно найти следующим образом. Во-первых заметим, что эта функция равна нулю при $x = 0$ и снова стремится к нулю когда $x \rightarrow \infty$. То есть, она ограничена и имеет максимум где-то в районе точки $x=1$. Для определения этой точки найдём, при каком $\mu > 0$

$$\frac{x}{(1+x)^2} \leq \frac{1}{2\mu}$$

нестрогое неравенство никогда не нарушается, один раз переходя в равенство. Преобразуя это неравенство, получаем ему эквивалентное

$$x^2 + 2(1-\mu)x + 1 \geq 0$$

Откуда следует, что $\mu = 2$, при этом равенство достигается при $x = 1$. Итак, возвращаясь к сопротивлениям, заключаем, что сопротивление каждого завода равно $2r$, а потребляемая каждым заводом и выдаваемая источником мощности равны

$$P_0 = \frac{U^2}{8r}, \quad P_{\text{full}} = \frac{U^2}{2r}.$$

Теперь перейдём к случаю, когда на одном из заводов изменили сопротивление с тем, чтобы максимизировать потребляемую мощность. Пусть сопротивление этого завода стало равным $R = yr$, а напряжение на источнике питания стало равным V . Сопротивление полезной нагрузки R_L , полное сопротивление цепи R_{full} , полная мощность источника и напряжение V_L на полезной нагрузке равны

$$R_L = \frac{2y}{2+y}r, \quad R_{\text{full}} = r \left(1 + \frac{2y}{2+y}\right), \quad P_{\text{full}} = \frac{V^2}{R_{\text{full}}} = \frac{U^2}{2r}, \quad V_L = \frac{R_L}{r + R_L} V$$

Потребляемая заводом-нарушителем мощность равна

$$P_{\text{max}} = \frac{V_L^2}{R} = \frac{4y}{(2+y)(2+3y)} P_{\text{full}}.$$

Для того, чтобы найти максимум полученной функции от y , используем уже описанный приём: нестрогое неравенство

$$\frac{4y}{(2+y)(2+3y)} \leq \frac{1}{\mu}$$

эквивалентно неравенству

$$3y^2 + 4(2-\mu)y + 4 \geq 0, \quad \Rightarrow \quad 2(2-\mu) = -\sqrt{3}\sqrt{4}, \quad \Rightarrow \quad \mu = 2 + \sqrt{3}$$

При этом равенство достигается при $y = 2/\sqrt{3}$, то есть сопротивление завода-нарушителя и потребляемая им мощность

$$R = \frac{2}{\sqrt{3}}r, \quad P_{\text{max}} = \frac{P_{\text{full}}}{\mu} = \frac{4}{2 + \sqrt{3}} P_0$$

Как видно, нарушителю лучше всего уменьшить сопротивление его завода в $\sqrt{3}$ раз, потребляемая им мощность возрастёт в $4/(2 + \sqrt{3})$ раза. Полная же полезная потребляемая мощность уменьшится со значения $2P_0$, став равной

$$P_L = \left(1 + \frac{R}{2r}\right) P_{\text{max}} = \frac{4}{3 + \sqrt{3}} 2P_0.$$

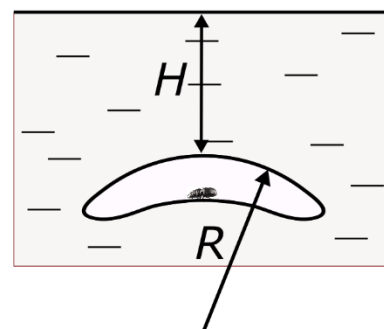
Численные значения таковы: путём нечестных махинаций, владелец одного из заводов сумеет увеличить потребляемую им мощность в 1.07 раз, тогда как потребляемая мощность у другого завода изменится намного сильнее, став равной 0.62 от номинальной.

Разбалловка.

Записан закон Ома для цепи	2 балла
Найдены сопротивления заводов в режиме равного оптимального потребления	4 балла
Найдены полная мощность источника и потребляемая каждым заводом мощность	2 балла
Записано условие сохранения полной мощности источника при изменении одного из сопротивлений	2 балла
Записано общее выражение для мощности, потребляемой заводом-нарушителем	1 балл
Записано выражение для мощности, потребляемой заводом-нарушителем, с учётом неизменной мощности источника	3 балла
Проведена максимизация выражения для мощности, потребляемой заводом-нарушителем. Найдены ответы для этой мощности и для общей мощности выделяющейся на полезной нагрузке	6 баллов

Задача 4. Оптика.

Условие (Вергелес Сергей Сергеевич) (20 баллов). Только самые маленькие пузырьки воздуха остаются почти круглыми в процессе всплывания в воде. Если пузырек воздуха, всплывающий в воде, имеет размеры порядка 10 см, то он принимает аксиально симметричную форму шляпки гриба, см. Рисунок. Жук плавает на нижней поверхности пузыря, перемещаясь вверх вместе со всем пузырьком. На какой глубине увидит жука смотрящий на него вертикально сверху, находясь над поверхностью воды? Расстояние от верхней границы пузыря до поверхности воды равно H , радиус кривизны верхней границы пузыря равен R , коэффициент преломления воды $n = 4/3$. Размеры жука малы по сравнению с расстоянием h от него до верхней границы пузыря.



1. Пренебрегите тем, что верхняя поверхность пузыря не плоская, а изогнутая. На какой глубине тогда увидит жука наблюдатель, находящийся над водой?
2. Примите во внимание кривизну верхней поверхности пузыря и получите полный ответ.

Решение. Если предмет находится за плоской пластиной толщиной H и имеющей показатель преломления n , то его мнимое изображение смещается на расстояние

$$\delta H = \frac{n-1}{n}H$$

к наблюдателю. Иными словами, кажется, что пластина имеет толщину

$$H' = \frac{H}{n}.$$

Действительно, рассмотрим луч, вышедший от предмета (жука), который прошёл через пластину, упав на неё под малым углом α . Луч выйдет из пластины под тем же углом. Если бы пластины не было, расстояние до предмета L было бы пропорционально расстоянию от луча до вертикали x , $x = \alpha L$. Однако когда луч проходил внутри пластины, он был направлен под углом α/n к вертикали, т.е. удалился от неё на $\alpha H/n$. Приходим к написанным выше ответам.

Теперь учтём то, что верхняя поверхность пузыря имеет радиус кривизны равный R . В этом случае прохождение луча от жука к наблюдателю можно представить как прохождение им оптической системы, состоящей из последовательно составленных вогнуто-плоской линзы и плоской пластины толщиной H . Фокусной расстояние линзы получаем по формуле линзы

$$F = -\frac{R}{n-1}.$$

Знак минус означает, что речь идёт о вогнутой линзе. Мнимое изображение жука после прохождения лучами линзы будет находиться на расстоянии h' , которое определяется уравнением

$$\frac{1}{h} - \frac{1}{h'} = \frac{1}{F}, \quad h' = \frac{1}{\frac{1}{h} + \frac{n-1}{R}}$$

В результате получаем, что полное расстояние от мнимого изображения жука до поверхности (кажущаяся глубина погружения жука) равна

$$\frac{H}{n} + \frac{1}{\frac{1}{h} + \frac{n-1}{R}} = \frac{3H}{4} + \frac{3Rh}{3R+h}.$$

Разбалловка.

Построено мнимое изображения для лучей, проходящих через пластину	4 балла
Правильно установлена видимая толщина плоского слоя воды (вопрос 1)	4 балла
Написана правильное выражение для фокусного расстояния плосковогнутой линзы	4 балла
Установлено положение мнимого изображения за линзой	4 балла

Выписан окончательный ответ (сказано о том, что оптическая система составная)	4 балла
---	---------

Задача 5. Задача-оценка.

Условие (Ковалёва Маргарита Алексеевна). Герои романа Жюль Верна «Потерянный остров» после крушения воздушного шара оказались на необитаемом острове. У них была последняя спичка и они разожгли огонь. Однако, после затопления их жилища огонь погас. Инженер Сайрес смог опять разжечь огонь, используя линзу, сделанную из стекол от двух часов, которую он заполнил водой. Оцените, какое время понадобилось ему чтобы зажечь трут (мох), если мощность солнечного излучения равна приблизительно 700 Вт/м^2 , плотность мха примерно 100 кг/м^3 , теплоемкость $2000 \text{ Дж/(кг } ^\circ\text{C)}$, температура воспламенения около $70 \text{ }^\circ\text{C}$.

Решение.

Поскольку линза собирает лучи по всей своей площади и фокусирует на области, где виден световой зайчик, то мы будем считать, что площадь, с которой поступает энергия на разогрев трута составляет площадь линзы:

$$N = W S_{\text{л}},$$

$$S_{\text{л}} = \pi d_{\text{л}}^2 / 4.$$

Общая энергия, поступившая от солнца на трут в месте нагрева, будет определяться временем нагрева,

$$Q_c = N t = W S_{\text{л}} t.$$

Объем воспламеняемого мха можно вычислить как площадь солнечного зайчика, умноженную на толщину прогреваемого слоя:

$$V = a S_{\text{з}} = a \pi d_{\text{з}}^2 / 4$$

Тогда энергия, необходимая для нагрева этого объема до температуры воспламенения, будет равна

$$Q = C m \Delta T = C \rho V (T_{\text{в}} - T_0) = C \rho a \frac{\pi d_{\text{з}}^2}{4} (T_{\text{в}} - T_0)$$

Считаем, что часть энергии солнца была потеряна в процессе нагрева, т.е. у такого нагревателя есть КПД $\eta < 1$. Тогда

$$Q_c \eta = Q$$

Тогда время розжига можно вычислить как

$$t = Q / (W S_{\text{л}} \eta) = \frac{C \rho a \frac{\pi d_{\text{з}}^2}{4} (T_{\text{в}} - T_0)}{\eta W \pi d_{\text{л}}^2 / 4} = \frac{C \rho a d_{\text{з}}^2 (T_{\text{в}} - T_0)}{\eta W d_{\text{л}}^2}$$

Предполагая, что $a = 2$ мм, $d_{\text{л}} = 5$ см, $d_{\text{з}} = 5$ мм, $T_0 = 25$ и $\eta = 0,5$ получим:

$$t \cong 4,6 \text{ с}$$

Разбалловка.

Выбран разумно диаметр стекла часов (2 – 10 см)	4 балла
Выбран разумно размер области фокусировки (порядка миллиметра(ов))	4 балла
Выбран разумно объём нагреваемого мха (глубина прогрева)	4 балла
Выбрана разумно температура окружающего воздуха	2 балла
Записано условие доведения мха до температуры воспламенения, получено время нагрева.	6 баллов