

Время выполнения заданий — 240 минут.

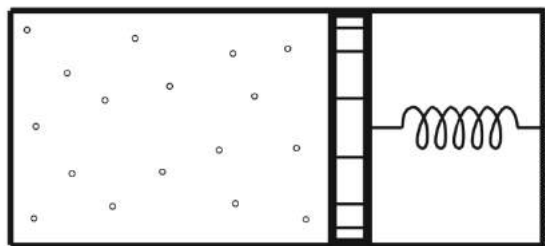
Пишите разборчиво. В работе не должно быть никаких пометок, не относящихся к ответам на вопросы. Если Вы не знаете ответа, ставьте прочерк.

Проверяться будет как сам ответ в бланке, так и черновики, по которым будет восстанавливаться логика получения результата.

Максимальное количество баллов — 100.

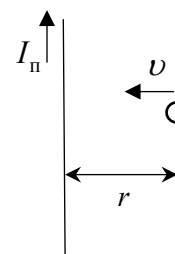
Задача 1. Пружина закреплена горизонтально и лежит на гладком основании. Пружина массивная, масса равномерно распределена вдоль её длины. К ней прикреплён груз массы M . В таком варианте наблюдаются колебания с некоторой частотой. После того, как груз убрали, частота колебаний увеличилась вдвое. Какова масса пружины m ? Указание: считать, что относительное растяжение пружины при колебаниях мало; длина волны сжатия в пружине при рассматриваемых частотах велика по сравнению с длиной пружины, т.е. пружина во все моменты времени растянута равномерно.

Задача 2 (20 баллов). Внутри горизонтального цилиндра находится смесь азота и гелия, запечатая поршнем с давящей на него пружиной (см. Рис). В отсеке, где находится пружина, создан вакуум. Пружина не деформирована, когда поршень прижат к противоположному торцу цилиндра. Если в течение минуты пропускать ток $I = 4$ А через сопротивление $r = 1$ Ом расположенное



внутри цилиндра, то температура смеси поднимается на $\Delta T = 10$ °С после установления равновесия; за такое короткое время газ под поршнем не успевает обменяться теплом с окружающей средой. Из-за того, что материал стенок оказался проницаем для атомов гелия, через очень большой интервал времени он полностью улетучился из цилиндра, при этом объем газа сократился на 25% от его первоначального значения, имея температуру, вернувшуюся к исходному равновесному с окружающей средой значению. Найти количество азота в смеси. Пренебрегайте теплоемкостями стенок, поршня и сопротивления. Поршень перемещается без трения.

Задача 3. Проводящее кольцо радиуса a и массы m находится на расстоянии r от бесконечного провода по которому течет ток $I_{\text{п}}$, причем провод лежит в плоскости кольца (см. рисунок). В результате толчка кольцо получило скорость v_0 , вектор которой также лежит в плоскости кольца и направлен перпендикулярно к проводу. Найти сопротивление кольца R , если известно, что к моменту своей окончательной остановки оно переместилось на Δr . Сила тяжести отсутствует, индуктивностью кольца пренебречь.



Задача 4. Феномен полного внутреннего отражения используют для создания



световодов, по которым можно передавать оптический сигнал без потерь. Рассмотрим световод цилиндрической формы, к центру торца которого вплотную приставлен точечный источник света. Пусть теперь в бракованной партии таких световодов они плавно сужаются от входного торца к выходному, причем поперечное сечение световода все время остаётся круглым. Оказалось, что те световоды, у которых отношение диаметров торцов не превышает $C_{\max} = 1,25$, сигнал от источника света приходит к выходному концу имея ту же интенсивность, что и в не бракованных. Найдите отсюда коэффициент преломления материала световода.

Задача 5. Оцените амплитуду индукции магнитного поля, создающуюся индукционной варочной конфоркой вблизи дна разогреваемой кастрюли, сделанной из проводящего металла. Мощность, передаваемая кастрюле, равна 1 кВт. Индукционная варочная панель внутри представляет из себя горизонтально расположенную спираль с током размера конфорки. Магнитное поле меняется с частотой 100 кГц. На такой частоте оно практически не проникает в металлическое дно кастрюли (глубина проникновения $\delta = 80$ мкм), огибая его как это происходит для сверхпроводника. Разогревает металл индуцированное магнитным полем электрическое поле, которое направлено ортогонально магнитному полю, также по касательной к поверхности металла и проникает в металл на ту же глубину вызывая в нём электрические токи. При этом отношение электрического поля к магнитному полю на поверхности металла оказывается фиксированным и задаётся так называемым поверхностным импедансом, он равен $\zeta = E/B = 5000$ В/(Тл · м). Удельное значение проводимости металла равно $\sigma = 10^6$ /(Ом · м).

11 класс. Решения.

Предложение оценки: каждая задача оценивается в 20 баллов, всего 5 задач, сумма баллов равна 100. Решение каждой задачи состоит из нескольких шагов, соответствующее разбиение по баллам приведено после решения каждой задачи; разбалловка приведена из расчёта 20 баллов на задачу.

Задача 1. Механика.

Условие (Вергелес Сергей Сергеевич). Пружина закреплена горизонтально и лежит на гладком основании. Пружина массивная, масса равномерно распределена вдоль её длины. К ней прикреплен груз массы M . В таком варианте наблюдаются колебания с некоторой частотой. После того, как груз убрали, частота колебаний увеличилась вдвое. Какова масса пружины m ? Указание: считать, что относительное растяжение пружины при колебаниях мало; длина волны сжатия в пружине при рассматриваемых частотах велика по сравнению с длиной пружины, т.е. пружина во все моменты времени растянута равномерно.

Решение: Вообще говоря, при установившихся колебаниях в пружине будут наблюдаться стоячие волны упругости. В месте крепления пружины у этих колебаний будет узел. Однако указано, что длина волны этих колебаний велика по сравнению с длиной пружины. Это означает, что величина горизонтального смещения u каждого элемента пружины будет линейно зависеть от горизонтального положения этого элемента z :

$$u = \frac{z}{h} A \quad (1)$$

где h – длина пружины, A – амплитуда колебаний груза (конца пружины). Этот закон соответствует однородному растяжению пружины по длине. Если A изменяется во времени, то кинетическая энергия движения пружины равна

$$T_{\text{пр}} = \frac{m}{2h} \int_0^h \dot{u}^2 dz = \frac{m \dot{A}^2}{6} \quad (2)$$

В этом выражении отношение m/h можно воспринимать как массовую погонную плотность пружины. Теперь установить частоту колебаний. Для этого запишем кинетическую T и потенциальную Π энергии колебаний:

$$T = \frac{1}{2} \left(\frac{m}{3} + M \right) \left(\frac{dA}{dt} \right)^2, \quad \Pi = \frac{kA^2}{2}.$$

Частота колебаний равна корню из отношения коэффициентов при $(dA/dt)^2$ и A^2 :

$$\omega = \sqrt{k / \left(\frac{m}{3} + M \right)}$$

используя эту формулу сначала для варианта с грузом, а потом без него, получаем, что

$$m = M$$

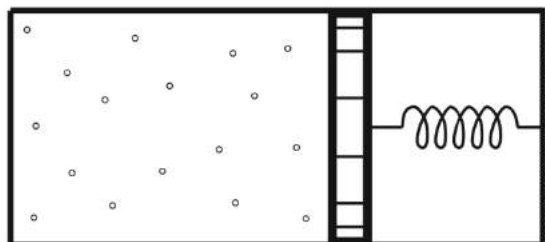
Разбалловка.

Установлен факт равномерного растяжения пружины, т.е. написана формула (1):	4
Найдена кинетическая энергия движения пружины. Вариант: найдена сила, с которой пружина действует на точку крепления в отсутствии груза	7
Неправильно найдена кинетическая энергия – в формуле (2) вместо 1/6 стоит ¼ или ещё что-то	3
Найден правильный ответ	6

Задача 2. Термодинамика.

Условие (Аникин Юрий Александрович).

Внутри горизонтального цилиндра находится смесь азота и гелия, запертая поршнем с давящей на него пружиной (см. Рис). В отсеке, где находится пружина, создан вакуум. Пружина не деформирована, когда поршень прижат к противоположному торцу цилиндра.



Если в течение минуты пропускать ток $I = 4 \text{ А}$ через сопротивление $r = 1 \text{ Ом}$ расположенное внутри цилиндра, то температура смеси поднимается на $\Delta T = 10 \text{ }^\circ\text{C}$ после установления равновесия; за такое короткое время газ под поршнем не успевает обменяться теплом с окружающей средой. Из-за того, что материал стенок оказался проницаем для атомов гелия, через очень большой интервал времени он полностью улетучился из цилиндра, при этом объем газа сократился на 25% от его первоначального значения, имея температуру, вернувшуюся к исходному равновесному с окружающей средой значению. Найти количество азота в смеси. Пренебрегайте теплоемкостями стенок, поршня и сопротивления. Поршень перемещается без трения.

Решение. Обозначим ν_1, ν_2 – количество молей гелия и азота, соответственно. Работа, совершенная газом при расширении:

$$A = \frac{kx_2^2}{2} - \frac{kx_1^2}{2} = \frac{P_2V_2}{2} - \frac{P_1V_1}{2} = \frac{1}{2}(\nu_1 + \nu_2)R\Delta T$$

Из первого начала термодинамики

$$I^2rt = \frac{3}{2}v_1R\Delta T + \frac{5}{2}v_2R\Delta T + \frac{1}{2}(v_1 + v_2)R\Delta T = 2v_1R\Delta T + 3v_2R\Delta T$$

Так как в такой системе давление $P \sim V$, то при одинаковой температуре начальные и конечные объемы связаны соотношением:

$$\frac{v_2}{v_1 + v_2} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16} \Rightarrow v_1 = \frac{7}{9}v_2$$

Подставляя это соотношение в предыдущее выражение, получим в конечном итоге

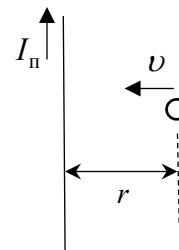
$$v_2 = \frac{9}{41} \frac{I^2rt}{R\Delta T} \approx 2,53 \text{ моля}$$

Разбалловка.

Установлен факт линейной зависимости давления от объёма, $P \sim V$	4
Найдена работа газа при расширении	5
Написано первое начало термодинамики	5
Получен ответ в формульном виде	3
Получен ответ в численном виде	3

Задача 3. Электричество и магнетизм.

Задача (Аникин Юрий Александрович). Проводящее кольцо радиуса a и массы m находится на расстоянии r от бесконечного провода по которому течет ток $I_{\text{п}}$, причем провод лежит в плоскости кольца (см. рисунок). В результате толчка кольцо получило скорость v_0 , вектор которой также лежит в плоскости кольца и направлен перпендикулярно к проводу. Найти сопротивление кольца R , если известно, что к моменту своей окончательной остановки оно переместилось на Δr . Сила тяжести отсутствует, индуктивностью кольца пренебречь.



Решение. В кольце возникнет ток I :

$$IR = -\frac{dB}{dt} \pi a^2 = -\frac{dB}{dr} \pi a^2 v = \frac{\mu_0 I_{\text{п}}}{2r^2} a^2 v$$

Мощность выделения тепла в кольце равна мощности силы торможения (возникающей из-за разности сил Ампера на разных сторонах кольца)

$$I^2 R = \left(\frac{\mu_0 I_{\text{п}}}{2r^2} a^2 v\right)^2 \frac{1}{R} = -Fv \Rightarrow F = -kv, \quad k = \frac{1}{R} \left(\frac{\mu_0 I_{\text{п}}}{2r^2} a^2\right)^2$$

Из-за малости перемещения кольца считаем k постоянным. Из 2-ого закона Ньютона:

$$m \frac{dv}{dt} = -k \frac{dr}{dt} \Rightarrow mv_0 = -k\Delta r$$

Отсюда сопротивление кольца

$$R = \frac{|\Delta r|}{mv_0} \left(\frac{\mu_0 I_{\text{п}}}{2r^2} a^2 \right)^2$$

Разбалловка.

Получена связь тока в кольце с изменением через него магнитного потока	5
Связаны между собой мощность, выделяющаяся в виде омического тепла в кольце, и мощность работы силы Ампера	5
Написано уравнение Ньютона на движение кольца	4
Получен окончательный ответ	6

Задача 4. Оптика

Условие (Аникин Юрий Александрович). Светильник состоит из: а) тонкого цилиндрического световода, б) приставленного к центру его входного торца точечного источника света, в) половинки шара прислоненной центром своей плоской стороны к выходному торцу световода. Шар сделан из того же материала, что и световод, его диаметр много больше выходного диаметра световода. В бракованной партии таких светильников, световоды плавно сужались от входного торца к выходному (см. Рис.), причем поперечное сечение световода все время оставалось круглым. Оказалось, что



те светильники, у которых отношение диаметров торцов световода не превышает $C_{\text{max}} = 1.25$, светят с такой же интенсивностью, что и не бракованные. Найдите отсюда коэффициент преломления материала светильника.

Решение. Половинка шара нужна в задаче для того, чтобы все лучи, достигнув выходного торца, покидали световод – так как диаметр шара много больше диаметра выходного торца, световод выступает точечным источником света, и поскольку он расположен в центре шара, то все лучи, вышедшие из него, покинут светильник.

Углы падения лучей источника света на входной торец световода лежат в интервале $(0, \pi/2)$. По закону Снеллиуса, после прохождения границы раздела сред, углы отклонения лучей от оси световода (далее, «наклоны лучей») будут лежат в интервале $(0, \arcsin\{1/n\})$.

Обозначим α локальный наклон боковой стенки к оси световода. Нетрудно показать, что при отражении луча от такой стенки, его угол наклона увеличивается на $\Delta\gamma = 2\alpha$. Между отражениями луч сместится вдоль оси на

$$l = d \operatorname{ctg} \gamma \quad (1)$$

При этом диаметр световода изменится на величину

$$\Delta d = -2\alpha d \operatorname{ctg} \gamma = -\Delta \gamma d \operatorname{ctg} \gamma \Rightarrow \sin \gamma \Delta d = -d \cos \gamma \Delta \gamma \approx -d \Delta(\sin \gamma)$$

Отсюда, для угла наклона луча получается инвариант

$$d \sin \gamma = \operatorname{const} \quad (2)$$

Таким образом, по мере сужения световода угол наклона луча растёт, и если он превышает критический угол, то такой луч не претерпевает полного отражения и уходит через боковую стенку световода, не достигнув выходного торца. Условие полного отражения:

$$\sin \gamma < \sqrt{1 - 1/n^2}$$

Интенсивность светильника не будет меняться, если условию полного отражения удовлетворяет максимально возможный угол наклона лучей в световоде, для которого:

$$\sin \gamma_{\max} = \frac{d_1}{d_2 n} \quad (3)$$

(d_1, d_2 – диаметры торцов). Отсюда

$$C_{\max} \frac{1}{n} = \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}} \Rightarrow n = \sqrt{1 + C_{\max}^2} = 1,6$$

Разбалловка.

Найдено изменение угла наклона луча при отражении $\Delta \gamma = 2\alpha$	3
Найдено смещение луча между отражениями	3
Найдён инвариант (2)	5
Записано условие полного отражения	3
Найдена связь максимального угла распространения с отношением диаметров (3)	3
Получен окончательный ответ	3

Задача 5. Задача-оценка.

Условие (Вергелес Сергей Сергеевич). Оцените амплитуду индукции магнитного поля, создающуюся индукционной варочной конфоркой вблизи дна разогреваемой кастрюли, сделанной из проводящего металла. Мощность, передаваемая кастрюле, равна 1 кВт. Индукционная варочная панель внутри представляет из себя горизонтально расположенную спираль с током размера конфорки. Магнитное поле меняется с частотой 100 кГц. На такой частоте оно практически не проникает в металлическое дно кастрюли (глубина проникновения $\delta = 80$ мкм), огибая его как это происходит для

сверхпроводника. Разогревает металл индуцированное магнитным полем электрическое поле, которое направлено ортогонально магнитному полю, также по касательной к поверхности металла и проникает в металл на ту же глубину вызывая в нём электрические токи. При этом отношение электрического поля к магнитному полю на поверхности металла оказывается фиксированным и задаётся так называемым поверхностным импедансом, он равен $\zeta = E/B = 5000 \text{ В}/(\text{Тл} \cdot \text{м})$. Удельное значение проводимости металла равно $\sigma = 10^6/(\text{Ом} \cdot \text{м})$.

Решение. Возьмём кастрюлю диаметром 10 см., тогда площадь её поверхности равна $S = 300 \text{ см}^2$. Для простоты будем предполагать, что во всех точках поверхности дна кастрюли электрическое поле, созданное индукцией магнитного поля, по амплитуде одно и то же и равно E . Плотность тока, который создаёт электрическое поле, равна $j = \sigma E$. Объёмная плотность мощности, развиваемая электрическим полем над током, равна σE^2 . Поэтому общая мощность, выделяемая в виде тепла в дне кастрюли, равна

$$Q = S\delta\sigma E^2$$

Используя поверхностный импеданс, получаем, что

$$Q = S\delta\sigma\zeta^2 B^2, \quad B = \frac{1}{\zeta} \sqrt{\frac{Q}{S\delta\sigma}} = 4.1 \text{ мТл}$$

Разбалловка.

Нарисовано (или описано словами) распределение магнитного поля в пространстве	4
Нарисовано (или описано словами) распределение электрического поля в пространстве	4
Записана формула σE^2 для объёмной плотности выделения тепла	4
или записана формула $j = \sigma E$ для объёмной плотности тока	3
Назначен разумный размер кастрюли	2
Применена формула с поверхностным импедансом, выражено E через B и подставлено в какую-либо разумную формулу	3
Получен правильный ответ в формульном виде	15
Получена правильная оценка числа	5