

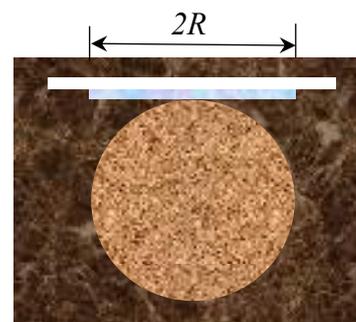
Время выполнения заданий — 240 минут.

Пишите разборчиво. В работе не должно быть никаких пометок, не относящихся к ответам на вопросы. Если Вы не знаете ответа, ставьте прочерк.

Проверяться будет как сам ответ в бланке, так и черновики, по которым будет восстанавливаться логика получения результата.

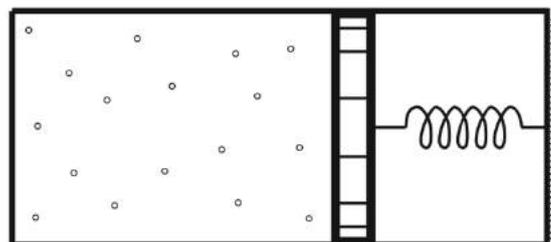
Максимальное количество баллов — 100.

**Задача 1.** Обнаружив неглубокое подземное круглое озеро радиуса  $R = 200$  м ученые провели высокоточные оптические измерения и установили, что кривизна поверхности воды в нем отличается от кривизны радиуса Земли. Причем так, что поверхность воды в центре озера расположена на  $\Delta h = 1$  мм ниже воображаемой сферы проходящей через края озера и имеющей радиус кривизны Земли. Эхолокация показала, что под озером находится сферическая неоднородность породы того же радиуса, что и само озеро. Центр неоднородности лежит точно под центром озера, и своим верхом она касается озера (см. рис). Найдите плотность материала неоднородности, считая, что плотность окружающих пород равна средней плотности Земли  $\rho = 5515$  кг/м<sup>3</sup>. Радиус Земли  $R_3 = 6400$  км.

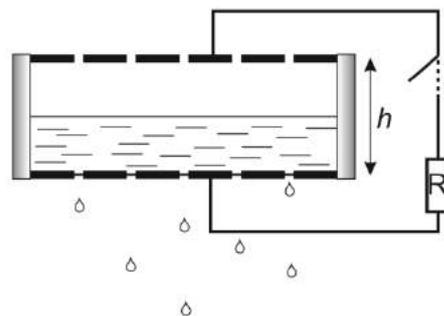


**Задача 2.** Пружина с линейным законом растяжения от приложенной силы имеет в состоянии равновесия длину  $3R/2$ , а если к ней подвесить грузик, то длина пружины составит  $5R/2$ . Грузик положили на дно сферической гладкой неподвижной поверхности радиуса  $R$ , а начало пружины закрепили на высоте  $2R$  над нижней точкой поверхности. Затем, не отрывая его от поверхности, грузик сместили на небольшое по сравнению с  $R$  расстояние и отпустили. Найдите период малых колебаний груза.

**Задача 3.** Внутри горизонтального цилиндра находится смесь азота и гелия, запертая поршнем с давящей на него пружиной (см. Рис). В отсеке, где находится пружина, создан вакуум. Пружина не деформирована, когда поршень прижат к противоположному торцу цилиндра. Если в течение минуты пропускать ток  $I = 4$  А через сопротивление  $r = 1$  Ом расположенное внутри цилиндра, то температура смеси поднимается на  $\Delta T = 10$  °С после установления равновесия; за такое короткое время газ под поршнем не успевает обменяться теплом с окружающей средой. Из-за того, что материал стенок оказался проницаем для атомов гелия, через очень большой интервал времени он полностью улетучился из цилиндра, при этом объем газа сократился на 25% от его первоначального значения, имея температуру, вернувшуюся к исходному равновесному с окружающей средой значению. Найти количество азота в смеси. Пренебрегайте теплоемкостями стенок, поршня и сопротивления. Поршень перемещается без трения.



**Задача 4.** В сосуде цилиндрической формы, у которого дно представляет из себя металлическую пластину с небольшими дырками, бока сделаны из стекла высотой  $h$  (малой по сравнению с радиусом сосуда), а крышка – такую же металлическую пластину с дырками, налит раствор поваренной соли, являющийся хорошо проводящим электролитом. Протеканию через дырки дна электролиту препятствует напряжение, которое создаётся противоположными зарядами на двух пластинах. Электролит заполняет половину сосуда. В некоторый момент замыкают цепь (см. рисунок), в которой присутствует очень большое сопротивление  $R$ . После этого электролит начинает медленно протекать через дырки в дне. С какой скоростью (отношение малых приращений изменения объёма электролита в сосуде к приращению времени,  $\Delta V/\Delta t$ ) будет происходить это протекание сразу после включения? Считать, что в электролите в каждый момент времени успевает установиться механическое равновесие; сопротивлением электролита пренебречь.



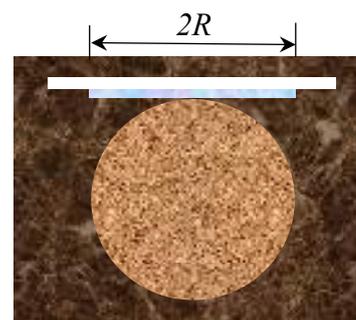
**Задача 5.** Считая, что температура атмосферы не зависит от высоты, оцените температуру кипения воды на высоте 5 км. Известно, что падение давления насыщенных паров воды на 20% достигается понижением температуры паров на  $5.5^\circ\text{C}$ .

## 10 класс. Решения.

Предложение оценки: задачи 1-3 оцениваются в 20 баллов, задача 4 в 25 баллов, задача 5 в 15 баллов, сумма баллов равна 100. Решение каждой задачи состоит из нескольких шагов, соответствующее разбиение по баллам приведено после решения каждой задачи.

### Задача 1. Механика.

**Условие (Аникин Юрий Александрович).** Обнаружив неглубокое подземное круглое озеро радиуса  $R = 200$  м ученые провели высокоточные оптические измерения и установили, что кривизна поверхности воды в нем отличается от кривизны радиуса Земли. Причем так, что поверхность воды в центре озера расположена на  $\Delta h = 1$  мм ниже воображаемой сферы проходящей через края озера и имеющей радиус кривизны Земли. Эхолокация показала, что под озером находится сферическая неоднородность породы того же радиуса, что и само озеро. Центр неоднородности лежит точно под центром озера, и своим верхом она касается озера (см. рис). Найдите плотность материала неоднородности, считая, что плотность окружающих пород равна средней плотности Земли  $\rho = 5515$  кг/м<sup>3</sup>. Радиус Земли  $R_3 = 6400$  км.



**Решение.** Неоднородность дает локальную добавку к вектору ускорения  $\mathbf{g}$  по величине равную

$$a = \frac{GM_{\text{eff}}}{r^2}$$

где  $r$  – расстояние от центра линзы, а  $M_{\text{eff}}$  определяется разностью плотностей материала неоднородности и окружающих пород:

$$M_{\text{eff}} = \frac{4\pi}{3} \Delta\rho R^3$$

Суммарный гравитационный потенциал на поверхности озера

$$-\frac{GM_{\text{eff}}}{r} + gy = \text{const} \Rightarrow -\frac{GM_{\text{eff}}}{R} + \frac{GM_{\text{eff}}}{\sqrt{2}R} = g\Delta h$$

Представив ускорение свободного падения Земли в виде

$$g = \frac{4\pi}{3} \rho G R_3$$

окончательно запишем

$$\rho_H = \rho + \Delta\rho = \rho - \rho \frac{R_3 \Delta h}{R^2} \frac{1}{1-1/\sqrt{2}} = 2500 \text{ кг/м}^3$$

*Примечание.* Пещера не влияет на уровень озера, т.к. из рисунка ясно, что она будет давать гравитационный потенциал бесконечной пластины, т.е. зависящий только от координаты  $y$ . Подземность озера нужна в задаче для того, чтобы ученые могли проводить прецизионные измерения с его поверхностью – пещера защищает зеркало воды от атмосферных явлений.

**Разбалловка.**

Сделано утверждение, что поверхность жидкости является эквипотенциальной	4 балла
Применён принцип суперпозиции для гравитационного потенциала (или гравитационного поля)	4 балла
Найдена масса (отрицательная) полости	4 балла
Написано уравнение на эквипотенциальность	4 балла
Получен окончательный ответ	4 балла

### Задача 2. Механика.

**Условие (Вергелес Сергей Сергеевич).** Пружина с линейным законом растяжения от приложенной силы имеет в состоянии равновесия длину  $3R/2$ , а если к ней подвесить грузик, то длина пружины составит  $5R/2$ . Грузик положили на дно сферической гладкой неподвижной поверхности радиуса  $R$ , а начало пружины закрепили на высоте  $2R$  над нижней точкой поверхности. Затем, не отрывая его от поверхности, грузик сместили на небольшое по сравнению с  $R$  расстояние и отпустили. Найдите период малых колебаний груза.

**Решение.** При смещении на расстояние  $x$  в горизонтальном направлении грузик будет подниматься на высоту

$$z = \frac{x^2}{2R}$$

Длина пружины при этом изменится от значения  $2R$  на величину

$$u = \sqrt{(2R - z)^2 + x^2} - 2R \approx -\frac{x^2}{4R}$$

Сила растяжения пружины в нижнем положении грузика равна  $mg/2$ , где  $m$  – масса грузика. Поэтому при смещении грузика пружина совершает работу

$$A_{\text{пр}} = \frac{mg}{2} \frac{x^2}{4R} = \frac{mgx^2}{8R},$$

то есть полная потенциальная энергия грузика

$$П = mgz - A_{\text{пр}} = \frac{3mgx^2}{8R}$$

Таким образом, частота колебаний грузика

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{4R}}$$

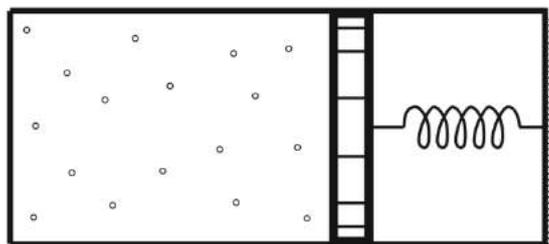
**Разбалловка.**

Нарисован правильный рисунок, как расположены элементы схемы	4
Посчитана зависимость удлинения пружины от горизонтального смещения	4
Посчитана зависимость потенциальной энергии пружины в зависимости от горизонтального смещения	4
Посчитана зависимость гравитационной потенциальной энергии в зависимости от горизонтального смещения	4
Посчитан период колебаний	4
или	
Посчитана сила, действующая со стороны пружины на грузик	5
Посчитана сила, действующая со стороны гравитационного поля на грузик с учётом реакции опоры	5
Написано уравнения движения	5
Извлечён период колебаний	5

**Задача 3. Термодинамика.**

**Условие (Аникин Юрий Александрович).**

Внутри горизонтального цилиндра находится смесь азота и гелия, запёртая поршнем с давящей на него пружинной (см. Рис). В отсеке, где находится пружина, создан вакуум. Пружина не деформирована, когда поршень прижат к противоположному торцу цилиндра.



Если в течение минуты пропускать ток  $I = 4 \text{ А}$  через сопротивление  $r = 1 \text{ Ом}$  расположенное внутри цилиндра, то температура смеси поднимается на  $\Delta T = 10 \text{ }^\circ\text{C}$  после установления равновесия; за такое короткое время газ под поршнем не успевает обменяться теплом с окружающей средой. Из-за того, что материал стенок оказался проницаем для атомов гелия, через очень большой интервал времени он полностью улетучился из цилиндра, при этом объём газа сократился на 25% от его первоначального значения, имея температуру, вернувшуюся к исходному равновесному с окружающей

средой значению. Найти количество азота в смеси. Пренебрегайте теплоемкостями стенок, поршня и сопротивления. Поршень перемещается без трения.

**Решение.** Обозначим  $\nu_1, \nu_2$  – количество молей гелия и азота, соответственно. Работа, совершенная газом при расширении:

$$A = \frac{kx_2^2}{2} - \frac{kx_1^2}{2} = \frac{P_2V_2}{2} - \frac{P_1V_1}{2} = \frac{1}{2}(\nu_1 + \nu_2)R\Delta T$$

Из первого начала термодинамики

$$I^2rt = \frac{3}{2}\nu_1R\Delta T + \frac{5}{2}\nu_2R\Delta T + \frac{1}{2}(\nu_1 + \nu_2)R\Delta T = 2\nu_1R\Delta T + 3\nu_2R\Delta T$$

Так как в такой системе давление  $P \sim V$ , то при одинаковой температуре начальные и конечные объемы связаны соотношением:

$$\frac{\nu_2}{\nu_1 + \nu_2} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16} \Rightarrow \nu_1 = \frac{7}{9}\nu_2$$

Подставляя это соотношение в предыдущее выражение, получим в конечном итоге

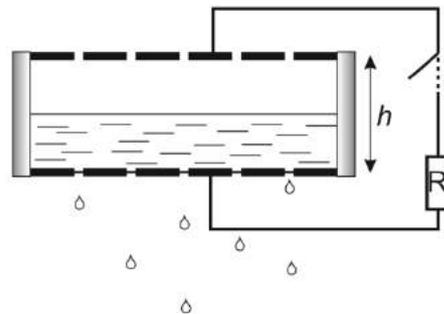
$$\nu_2 = \frac{9}{41} \frac{I^2rt}{R\Delta T} \approx 2,53 \text{ моля}$$

**Разбалловка.**

Установлен факт линейной зависимости давления от объёма, $P \sim V$	4
Найдена работа газа при расширении	5
Написано первое начало термодинамики	5
Получен ответ в формульном виде	3
Получен ответ в численном виде	3

### Задача 4. Электростатика

**Задача 4 (Вергелес Сергей Сергеевич).** В сосуде цилиндрической формы, у которого дно представляет из себя металлическую пластину с небольшими дырками, бока сделаны из стекла высотой  $h$  (малой по сравнению с радиусом сосуда), а крышка – такую же металлическую пластину с дырками, налит раствор поваренной соли, являющийся хорошо проводящим электролитом. Протеканию через дырки дна электролиту препятствует напряжение, которое создаётся противоположными зарядами на двух пластинах. Электролит заполняет половину сосуда. В некоторый момент замыкают цепь (см. рисунок), в которой присутствует очень большое сопротивление  $R$ . После этого электролит начинает



медленно протекать через дырки в дне. С какой скоростью (отношение малых приращений изменения объёма электролита в сосуде к приращению времени,  $\Delta V/\Delta t$ ) будет происходить это протекание сразу после включения? Считать, что в электролите в каждый момент времени успевает установиться механическое равновесие; сопротивлением электролита пренебречь.

**Решение.** Найдём массовую объёмную плотность электролита, рассмотрев систему до замыкания ключа. По сути мы имеем дело с конденсатором, образованным верхней и нижней стенками сосуда; пусть заряды на верхней и на нижней обкладках равны  $Q$  и  $-Q$  соответственно. Однако электролит внутри себя изменяет поле до нуля. Электрическое поле поэтому присутствует только под крышкой сосуда над электролитом и равно

$$E = \frac{Q}{\varepsilon_0 S}$$

Электролит создаёт заряженный слой на верхней поверхности, суммарный заряд которого равен заряду крышки с противоположным знаком. Поэтому электрическое поле действует с поверхностной силой (т.е. создаёт перепад давления)

$$\Delta p = \frac{EQ}{2S} = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S^2}$$

Этот перепад давления компенсируется высотой столба электролита (обозначим его  $x$ , до включения  $x = h/2$ ), поскольку над электролитом и под ним давление равно атмосферному:

$$\Delta p = \rho g x, \quad \Rightarrow \quad \rho = \frac{Q^2}{\varepsilon_0 S^2 g x}, \quad x = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S^2 g \rho}. \quad (1)$$

Ёмкость конденсатора, частично заполненного электролитом, равна

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{h - x}$$

Когда будет замкнут ключ, в контуре потечёт ток

$$I = \frac{U}{R}, \quad U = \frac{Q}{C}, \quad \Rightarrow \quad \frac{dQ}{dt} = -I = -\frac{Q(h-x)}{\varepsilon_0 S R};$$

Из уравнения (1) можно связать производную по времени от величины заряда на обкладках с производной по времени от высоты столба электролита:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{Q}{\varepsilon_0 S^2 g \rho} \frac{dQ}{dt}$$

В результате, скорость ухода электролита из пространства между пластинами ( $\text{м}^3/\text{с}$ )

$$q = -S \frac{dx}{dt} = \frac{h^2}{2\varepsilon_0 R},$$

где мы подставили значение  $x = h/2$  для высоты столба электролита.

**Разбалловка.**

Записано выражение для скачка давления на верхней границе электролита	5
Написано гидростатическое уравнение, выражающее собой условие непротекания электролита	4
Посчитана ёмкость конденсатора с электролитом	4
Написано уравнение на ток в замкнутой цепи	4
Написано уравнение, связывающее силу тока в цепи со скоростью убывания столба электролита	5
Получен конечный ответ на скорость расхода электролита	3

### Задача 5. Задача-оценка.

**Условие (Парфеньев Владимир Михайлович).** Считая, что температура атмосферы не зависит от высоты, оцените температуру кипения воды на высоте 5 км. Известно, что падение давления насыщенных паров воды на 20% достигается понижением температуры паров на 5.5°C.

**Решение.** Предположим, что атмосфера не разрежается с высотой (как оно есть на самом деле), а полностью однородна до некоторой высоты  $H$ . Эту высоту можно найти зная, что у поверхности Земли давление равно атмосферному  $P_0$ :

$$\rho g H = P_0$$

Массовая плотность атмосферы (у земли)  $\rho$  может быть найдена из средней молярной массы воздуха (30 а.е.м.) при данной температуре  $T = 20^\circ\text{C}$  или быть просто известной (равна  $\rho = 1.225 \text{ кг/м}^3$ ). Откуда получаем, что высота атмосферы

$$H = 8\,300 \text{ км}$$

На высоте  $h = 5 \text{ км}$  тогда будет давление

$$P_h = \left(1 - \frac{h}{H}\right) P_0 = 40 \text{ кПа}$$

Если кто-то из решающих установит, что на самом деле зависимость давления от высоты экспоненциальная,  $P_h = P_0 \exp(-h/H) = 55 \text{ кПа}$ , то он молодец.

Теперь надо установить, какова будет температура  $T_h$  кипения воды. Согласно условию

$$P_h = P_0 \cdot 0.8^{(100^\circ\text{C} - T_h)/dT}$$

где  $dT = 5.5^\circ\text{C}$  а  $0.8 = 1 - 20\%$ . Решая это уравнение относительно  $T_h$ , получаем

$$T_h = 100^\circ\text{C} - \frac{\ln(P_0/P_h)}{\ln 0.8} dT = 77^\circ\text{C}$$

Если пользоваться экспоненциальной зависимостью давления от высоты, то получится ответ  $T_h = 85$  °С.

**Разбалловка.**

Найдена высота атмосферного столба	4
Найдено давление на высоте	4
Написано уравнение связи между давлением и температурой кипения	4
получен окончательный ответ	3