Межрегиональная олимпиада школьников «Высшая проба»

2013-2014 учебный год

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ ЗАДАНИЙ ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНОГО ЭТАПА по СОВРЕМЕННЫМ ИНФОРМАЦИОННЫМ ТЕХНОЛОГИЯМ

1. Корни уравнения $x^2+mx+n=0$ являются целыми числами, и $m+n=14$. Найдите $m, n.$

Решение. Пусть $x_1, x_2 \in \mathbf{Z}$ – корни уравнения. Тогда по формулам Виета $m=-x_1-x_2$, $n=x_1x_2$. Отсюда $x_1x_2-x_1-x_2=14 \Rightarrow (x_1-1)(x_2-1)=15$. Осталось рассмотреть варианты разложения числа 15 в произведение целых множителей: $15=15\cdot 1=(-1)\cdot(-15)$ $=5\cdot 3=(-5)\cdot(-3)$. По найденным x_1, x_2 определяем $m, n.$

Ответ: $\begin{cases} m=-18 \\ n=32 \end{cases}$; $\begin{cases} m=-10 \\ n=24 \end{cases}$; $\begin{cases} m=14 \\ n=0 \end{cases}$; $\begin{cases} m=6 \\ n=8 \end{cases}$.

Критерии оценивания. Максимальный балл за задачу – 15. Если найдена часть решений – 6 баллов. Остальные баллы – в зависимости от продвижения в решении задачи.

2. Найдите, при каких значениях a система уравнений

$$\begin{cases} |x-y|+|x+y|=6 \\ |x-2|+|y|=a \end{cases}$$

имеет ровно три решения.

Решение. Из второго уравнения следует, что $a>0$. Изобразим на координатной плоскости xOy все точки $(x; y)$, координаты которых удовлетворяют уравнениям системы. Первому уравнению соответствует квадрат со сторонами, параллельными координатным осям. Центр этого квадрата совпадает с началом координат, а длины сторон равны 6 (см. рис. 1). Второму уравнению соответствует квадрат со сторонами, параллельными биссектрисам координатных углов. Центр этого квадрата находится в точке $(2; 0)$, а две вершины, лежащие на оси абсцисс, находятся в точках $(2-a; 0), (2+a; 0)$ (см. рис. 1). Число решений системы равно количеству точек пересечения этих двух квадратов. Три точки пересечения – только в случае $a=5$ (см. рис. 2).

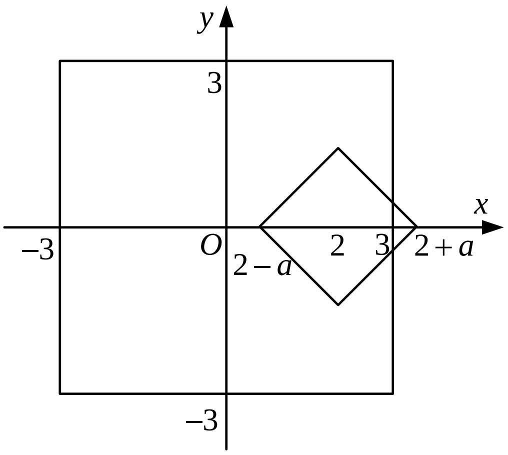

Рис. 1

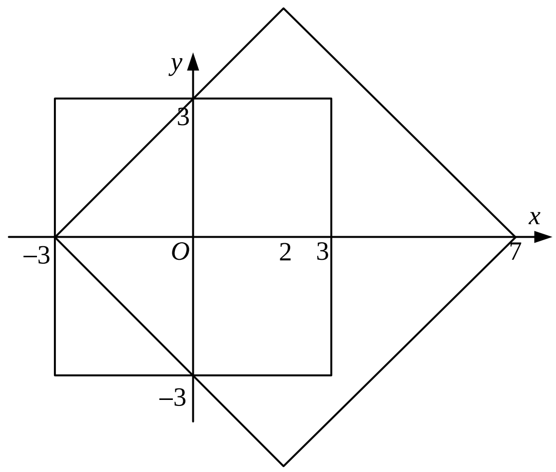

Рис. 2

Ответ: $a=5$

Критерии оценивания. Максимальный балл за задачу – 25. Если найдены области, задаваемые каждым из уравнений системы, – по 5 баллов. Остальные баллы – в зависимости от продвижения в решении задачи.

3. Траектория движения точки по координатной плоскости описывается уравнением

$$y=\frac{x^2+Ax+B}{\sqrt{1-x}}$$

Траектория зависит от двух параметров A и B. Напишите программу, которая по введённым значениям параметров A и B определяет, сколько раз точка пересечёт ось абсцисс. Если это количество бесконечно, то выведите отрицательное число –1.

Пример.

Вход	Выход
4.5 5	2

Решение. Сначала решим математическую задачу: найдём число решений уравнения

$$\frac{x^2+Ax+B}{\sqrt{1-x}}=0$$

в зависимости от значений параметров A и B. Подкоренное выражение положительно, поэтому $x<1$. Итак, нужно найти число решений квадратного уравнения $x^2+Ax+B=0$, удовлетворяющих условию $x<1$. Решим эту задачу графическим способом.

1) Уравнение $x^2+Ax+B=0$ имеет <u>два</u> различных корня, удовлетворяющих условию $x<1$, если парабола – график функции $y=x^2+Ax+B$ – расположена следующим образом (см. рис. 3)

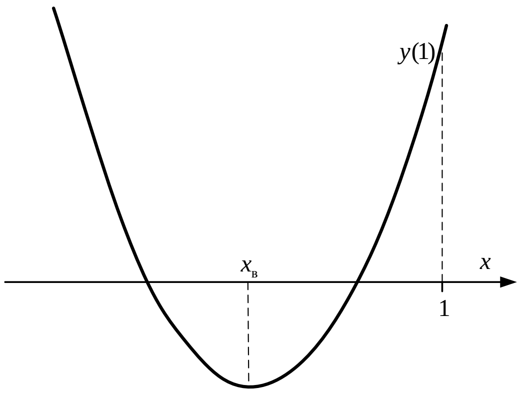

Рис. 3

Эта ситуация описывается следующим набором условий:

$$\begin{cases} D>0 \\ x_в<1 \\ y(1)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A^2-4B>0 \\ -\dfrac{A}{2}<1 \\ 1+A+B>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B<\dfrac{A^2}{4} \\ A>-2 \\ B>-A-1 \end{cases}$$

2) Уравнение $x^2+Ax+B=0$ имеет <u>один</u> корень, удовлетворяющий условию $x<1$, если парабола – график функции $y=x^2+Ax+B$ – расположена одним из трёх способов (см. рис. 4, 5, 6)

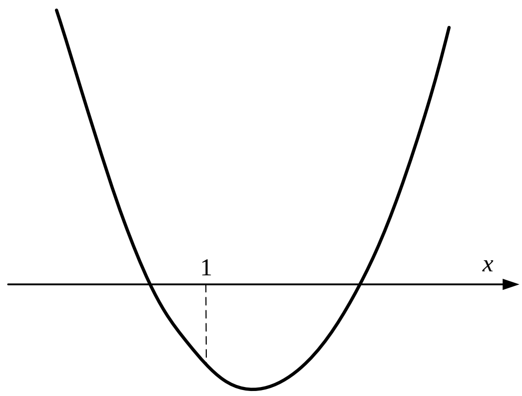

Рис. 4

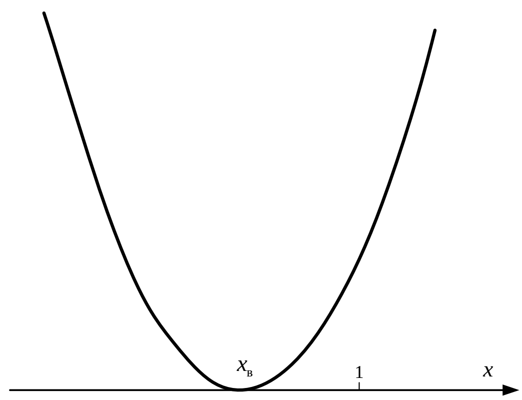

Рис. 5

Первый вариант (рис. 4) отвечает условию $y(1)<0 \Leftrightarrow 1+A+B<0 \Leftrightarrow B<-A-1$.
Второй вариант (рис. 5) описывается условиями:

$$\begin{cases} D=0 \\ x_в<1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A^2-4B=0 \\ -\dfrac{A}{2}<1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=\dfrac{A^2}{4} \\ A>-2 \end{cases}$$

Третий вариант (рис.6) описывается условиями:

$$\begin{cases} y(1)=0 \\ x_в<1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A+B+1=0 \\ -\dfrac{A}{2}<1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=-A-1 \\ A>-2 \end{cases}$$

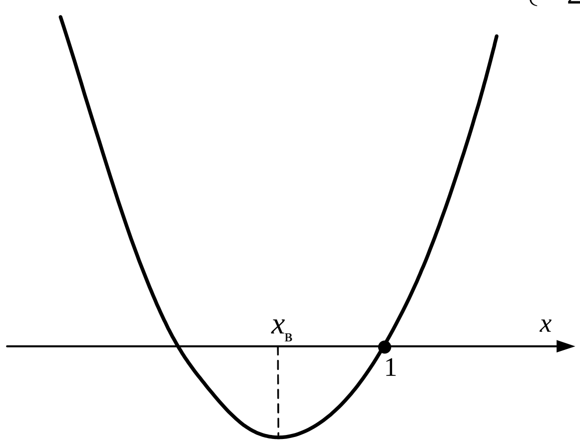

Рис. 6

3) Во всех остальных случаях уравнение $x^2+Ax+B=0$ не имеет решений, удовлетворяющих условию $x<1$, поэтому точка ни разу (ноль) не пересечёт ось абсцисс.

Критерии оценивания. Максимальный балл за задачу – 25. Для проверки программы использовались 8 тестов.

Номер теста	Вход	Выход	Количество баллов
1	–1 –2	1	3
2	2 1	1	3
3	–2 1	0	3
4	–6 9	0	3
5	5 6	2	3
6	–5 6	0	3
7	1 1	0	3
8	1 –2	1	4

4. Берётся натуральное десятичное число N (0 < N < 256), например 201, и в ячейку памяти вычислительной машины записывается его двоичное представление: 11001001 (размер ячейки – один байт). Над содержимым ячейки выполняется преобразование: циклический сдвиг влево на одну позицию. Все цифры двоичного числа сдвигаются влево на одну позицию, при этом старший бит переходит в младший: 10010011. Этой двоичной записи соответствует десятичное число 147. Преобразование повторяется восемь раз. Напишите программу, которая по введённому натуральному десятичному числу N (0 < N < 256) вычисляет наибольшее из десятичных чисел, полученных в процессе преобразований.
Пример.

Вход	Выход
201	228
11	194

Критерии оценивания. Максимальный балл за задачу – 35. Для проверки программы использовались 7 тестов.

Номер теста	Вход	Выход	Количество баллов
1	0	0	5
2	255	255	5
3	1	128	5
4	85	170	5
5	127	254	5
6	129	192	5
7	3	192	5