

Время выполнения: 120 мин

### Задача 1.

Сколько существует натуральных чисел от 1 до 2013, в десятичной записи которых содержится хотя бы одна цифра 3?

#### Решение.

Обозначим  $A_i$  ( $i=1,2,3$ ) – множество натуральных чисел от 0 до 999, у которых на  $i$ -м (считая справа налево) стоит цифра 3. Найдём, чему равно  $|A_1 \cup A_2 \cup A_3|$  – количество чисел от 0 до 999, в записи которых есть хотя бы одна цифра 3. Для этого воспользуемся формулой для мощности объединения трёх множеств:

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$

Поскольку  $|A_1| = |A_2| = |A_3| = 100$ ;  $|A_1 \cap A_2| = |A_1 \cap A_3| = |A_2 \cap A_3| = 10$ ;  $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 1$ , то  $|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = 271$ . Количество чисел от 1000 до 1999, в записи которых есть хотя бы одна цифра 3, также равно 271. Ещё учтём 2003 и 2013 и получим ответ  $271 \cdot 2 + 2 = 544$ .

**Ответ:** 544

#### Критерии оценки

Вычислено количество без учета слагаемого  $|A_1 \cap A_2 \cap A_3|$  – 5 баллов

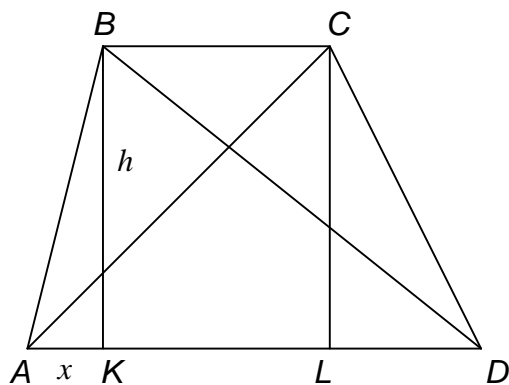
Учтено слагаемое  $|A_1 \cap A_2 \cap A_3|$  – 10 баллов

Сумма – 15 баллов

### Задача 2.

У трапеции длины диагоналей равны  $2\sqrt{13}$  и  $6\sqrt{5}$ , а длины оснований – 4 и 12. Найдите площадь трапеции. Можно ли в эту трапецию вписать окружность? Можно ли вокруг этой трапеции описать окружность?

#### Решение.



Дано:  $BC = 4$ ,  $AD = 12$ ,  $AC = 2\sqrt{13}$ ,  $BD = 6\sqrt{5}$ .  
Проведём высоты  $BK$  и  $CL$ . Обозначим  $BK = CL = h$ ,  $AK = x$ . Воспользуемся теоремой Пифагора для треугольников  $ACL$  и  $BDK$ .

$$\begin{cases} (x+4)^2 + h^2 = (2\sqrt{13})^2 \\ (12-x)^2 + h^2 = (6\sqrt{5})^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} h^2 = 52 - (x+4)^2 \\ h^2 = 180 - (12-x)^2 \end{cases}$$

$$52 - (x+4)^2 = 180 - (12-x)^2 \Leftrightarrow x = 0.$$

$h^2 = 36$ ,  $h = 6$ ,  $CD = \sqrt{h^2 + LD^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$ . Значит,  $AB \perp AD$ ,  $AB = h = 6$ .

1) Найдём площадь трапеции  $S_{ABCD} = \frac{BC + AD}{2} \cdot h = \frac{4 + 12}{2} \cdot 6 = 48$ .

2) Поскольку  $AB + CD = 6 + 10 = 16$ ;  $BC + AD = 4 + 12 = 16$ , то суммы противоположных сторон четырёхугольника  $ABCD$  равны, а это условие необходимо и достаточно для того, чтобы в четырёхугольник можно было вписать окружность.

3) Во вписанном четырёхугольнике сумма противоположных углов равна  $180^\circ$ . Но  $\angle BAD + \angle BCD = \angle BAD + \angle BCL + \angle LCD = 90^\circ + 90^\circ + \angle LCD > 180^\circ$ . Поэтому вокруг четырёхугольника  $ABCD$  нельзя описать окружность.

**Ответ:** 1) площадь равна 48; 2) вписать можно; 3) описать нельзя.

**Критерии оценки**

Составлены уравнения для нахождения элементов трапеции – 2 балла

Вычислены параметры трапеции – 5 баллов.

Вычислена площадь трапеции – 4 балла

Обосновано, что в эту трапецию можно вписать окружность – 2 балл

Обосновано, что вокруг этой трапеции нельзя вписать окружность – 2 балл

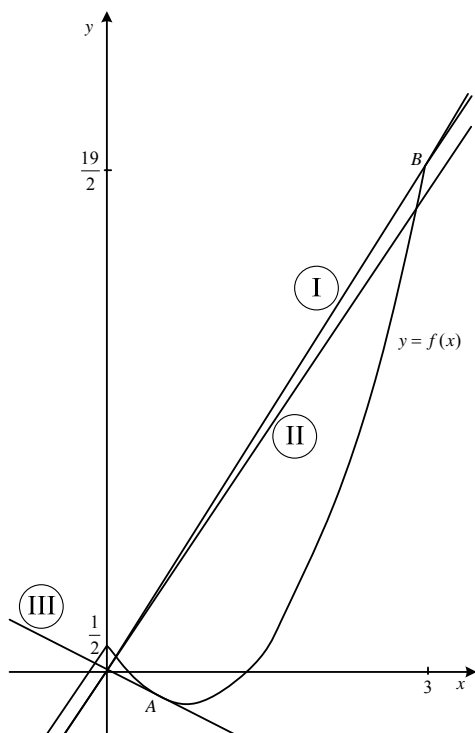
Сумма – 15 баллов

**Задача 3.**

Найдите все значения  $a$ , при которых уравнение

$$ax - \frac{1}{2} = x^2 - |x^2 - 3x|$$

имеет ровно два корня.

**Решение.**

Перепишем уравнение в виде

$$ax = f(x) = x^2 - |x^2 - 3x| + \frac{1}{2}$$

Левая часть уравнения соответствует семейству прямых  $y = ax$ , проходящих через начало координат и имеющих угловой коэффициент  $a$ . Построим график  $y = f(x)$ .

1) Если  $x^2 - 3x \geq 0$ , т.е. при  $x \in (-\infty; 0] \cup [3; +\infty)$ ,

$$f(x) = x^2 - x^2 + 3x + \frac{1}{2} = 3x + \frac{1}{2}.$$

2) Если  $x^2 - 3x \leq 0$ , т.е. при  $x \in [0; 3]$ ,

$$f(x) = x^2 + x^2 - 3x + \frac{1}{2} = 2x^2 - 3x + \frac{1}{2} = 2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{5}{8}$$

Итак, график функции  $y = f(x)$  – части прямой и параболы. Он показан на рисунке.

Нужно определить, при каких значениях  $a$  прямая  $y = ax$  пересекает график функции

$y = f(x)$  ровно в двух точках. Это возможно лишь в одном из трёх случаев.

I. Прямая  $y = ax$  проходит через точку  $B\left(3; \frac{19}{2}\right)$ . Тогда  $a = \frac{19/2}{3} = \frac{19}{6} = 3\frac{1}{6}$ .

II. Прямая  $y = ax$  параллельна прямой  $y = 3x + \frac{1}{2}$ . Тогда  $a = 3$ .

III. Прямая  $y = ax$  касается параболы  $y = 2x^2 - 3x + \frac{1}{2}$ , причём точка касания лежит в правой полуплоскости. Это соответствует тому, что уравнение  $ax = 2x^2 - 3x + \frac{1}{2}$  имеет одно решение.  $2x^2 - (a+3)x + \frac{1}{2} = 0$ ,  $D = (a+3)^2 - 4 = 0$ . Тогда  $a = -1$  или  $a = -5$ .

Если  $a = -1$ , то абсцисса точки касания  $x_A = \frac{a+3}{4} = \frac{-1+3}{4} = \frac{1}{2} > 0$  – подходит.

Если  $a = -5$ , то абсцисса точки касания  $x_A = \frac{a+3}{4} = \frac{-5+3}{4} = -\frac{1}{2} < 0$  – не подходит.

Ответ:  $a \in \left\{ -1; 3; 3\frac{1}{6} \right\}$

### Критерии оценки

Построен график  $y = f(x)$  – 10 баллов

Разобран случай I – 5 баллов.

Разобран случай II – 5 баллов

Разобран случай III – 10 баллов

Сумма – 30 баллов

### Задача 4.

Система счисления Майя является комбинацией пятеричной и двадцатеричной систем счисления. Первые четыре цифры обозначаются соответствующим количеством точек. Далее каждая очередная пятерка обозначается горизонтальной чертой. В системе счисления Майя нашлось место и для цифры ноль – она обозначается символом, похожим на глаз. На рисунке 1 приведены цифры Майя.

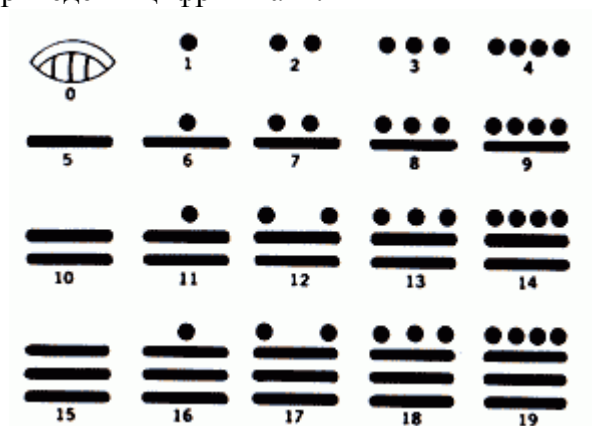


Рис.1 – Цифры Майя



Так у Майя изображалась число 20. При представлении числа цифры писались не слева направо, как привычно для нас, а сверху вниз (т.е. цифра старшего разряда находилась на «вершине»). Логично предположить, что «вес» разряда получается из «веса» предыдущего разряда домножением на 20, но в этой цепочке есть исключение: вместо  $20 \times 20 = 400$  для следующего разряда берется  $20 \times 18 = 360$ , поэтому и «веса» следующих разрядов не являются степенью 20: 1; 20; 360; 7 200; 144 000; 2 880 000 и т.д. (Существуют разные гипотезы о причинах такого нарушения).

Приведем еще несколько примеров (рис. 2):

$$19 \times 360 + 13 \times 20 + 13 = 7113_{10}$$

$$10 \times 360 + 0 \times 20 + 7 = 3607_{10}$$

$$2 \times 7200 + 0 \times 360 + 6 \times 20 + 5 = 14525_{10}$$

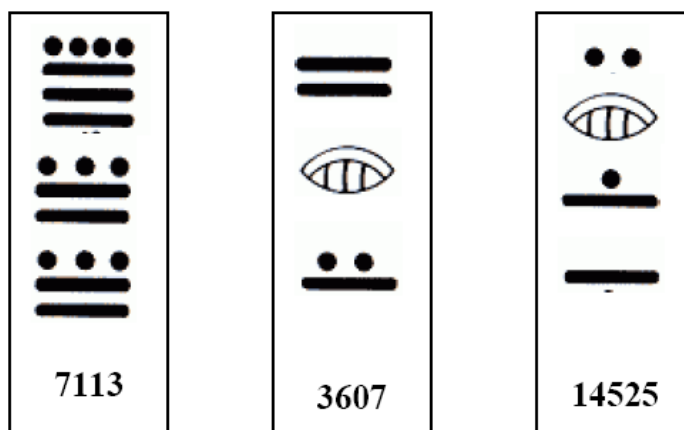


Рис. 2 – Примеры

Задания:

1. Число  $432\,733_{10}$  отобразите в системе Майя.
2. Какое десятичное число записано на рис. 3?



Рис. 3

**Решения и критерии оценки**

**1.**

$$432\,733_{10} = 3 * 144\,000 + 0 * 7\,200 + 2 * 360 + 0 * 20 + 13 * 1$$

Таким образом, число будет составлено из цифр

3 0 2 0 13

В алфавите Майя

**Ответ:**



Баллы	Критерии оценивания
5	Рисунок верен и представлено решение.
4	Возможны два случая:

	1) представлен рисунок с одной ошибкой; 2) в вычислении содержится одна ошибка.
3	Верный ответ, но отсутствует решение.
1-2	По мере продвижения решения имеются арифметические ошибки.

2.

На рис. 3 записаны следующие цифры:

5 2 0 6 19

$$5 * 144\ 000 + 2 * 7\ 200 + 0 * 360 + 6 * 20 + 19 * 1 = 734\ 539_{10}$$

Ответ: 734 539<sub>10</sub>

Баллы	Критерии оценивания
5	Ответ верен и представлено решение.
4	Имеется арифметическая ошибка в вычислениях.
3	Верный ответ, но отсутствует решение.
1-2	Ошибка декодирования.

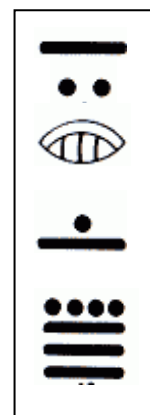


рис. 3

**Задача 5.**

В Великобритании использовались следующие монеты:

Монета	Стоимость	Вес, граммы
1 крона	5 шиллингов	28,4
1 шиллинг	12 пенсов	5,7
6 пенсов		3
3 пенса		6,75
1 пенс		9,4

Задания:

1. Найдите минимальный вес в граммах представления 1019 пенсов.

2. Напишите программу, которая запрашивает сумму в пенсах и производит выдачу указанной суммы монетами с минимальным весом в граммах. Количество монет разных типов указывается по возрастанию достоинства монет.

Пример:

Вход	Выход
170	2 0 0 4 2 98.4

3. Напишите программу, которая запрашивает сумму в пенсах и имеющееся количество монет каждого достоинства. Программа выдаёт заданную сумму с минимальным весом в граммах, учитывая исходные ограничения по количеству монет каждого типа. Если выдача суммы невозможна, то программа выдаёт NO. Количество монет разных типов указывается по возрастанию достоинства монет и на входе и на выходе.

Вход	Выход
21 0 0 0 4 5	NO
170 6 5 4 3 4	2 0 2 3 2 98,7

Укажите, какой язык программирования используется и для какого компилятора программа предназначена.

### Решения и критерии оценки

#### 1.

Так как с ростом достоинства монет уменьшается вес, то нужно разменивать сумму, начиная с монет наибольшего достоинства:

$$[1019 / 60] = 16 \text{ крон}$$

$$[(1019 - [1019 / 60] * 60) / 12] = [59 / 12] = 4 \text{ шиллинга}$$

$$[(59 - [59 / 12] * 12) / 6] = [11 / 6] = 1 \text{ шестипенсовая}$$

$$[(11 - [11 / 6] * 6) / 3] = [5 / 3] = 1 \text{ трехпенсовая}$$

$$5 - [5 / 3] * 3 = 2 \text{ однопенсовых}$$

Посчитаем вес:

$$16 * 28,4 + 4 * 5,7 + 3 * 1 + 6,75 * 1 + 9,4 * 2 = 505,75 \text{ г}$$

**Ответ: 505,75 г**

Баллы	Критерии оценивания
5	Вес подсчитан верно.
4	Верное количество монет каждого типа, но неверен вес.
1-3	По мере продвижения решения имеются ошибки.

#### 2.

Далее приводится решение на языке Паскаль. Решение может быть приведено на любом языке программирования, на алгоритмическом языке или в виде блок-схемы.

```

var
k,sh,p6,p3,p1,s:integer;
weight:real;
begin
readln(s);
k := s div 60;
s := s mod 60;

sh := s div 12;
s := s mod 12;

p6 := s div 6;
s := s mod 6;

p3 := s div 3;
p1 := s mod 3;

weight := k * 28.4 + sh * 5.7 + p6 * 3 + p3 * 6.75 + p1 * 9.4;

```

```
writeln(p1, ' ', p3, ' ', p6, ' ', sh, ' ', k);
writeln (weight);
end.
```

Баллы	Критерии оценивания
10	Алгоритм верен, задача решена.
7-9	Алгоритм верен, но присутствуют синтаксические ошибки, не влияющие на смысл алгоритма.
4-6	Алгоритм в целом верен, но есть существенные синтаксические и семантические ошибки.
1-3	Задача в целом не решена, но написаны алгоритмы для некоторых этапов решения задачи.

### 3.

Далее приводится решение на языке Паскаль. Решение может быть приведено на любом языке программирования, на алгоритмическом языке или в виде блок-схемы.

```
var
countP1,countP3,countP6,countSh,countK,
k,sh,p6,p3,p1,s:integer;
weight:real;
begin
readln(s);
readln(countP1,countP3,countP6,countSh,countK);

k := s div 60;
if k > countK then k := countK;
s := s - k * 60;

sh := s div 12;
if sh > countSh then sh := countSh;
s := s - sh * 12;

p6 := s div 6;
if p6 > countP6 then p6 := countP6;
s := s - p6 * 6;

p3 := s div 3;
if p3 > countP3 then p3 := countP3;
s := s - p3 * 3;

if s > countP1 then
  writeln('NO')
else
begin
  p1 := s;
  weight := k * 28.4 + sh * 5.7 + p6 * 3 + p3 * 6.75 + p1 * 9.4;
  writeln(p1, ' ', p3, ' ', p6, ' ', sh, ' ', k);
  writeln (weight);
end
```

end.

<b>Баллы</b>	<b>Критерии оценивания</b>
15	Алгоритм верен, задача решена.
11-14	Алгоритм верен, но присутствует неэффективность или синтаксические ошибки, не влияющие на смысл алгоритма.
6-10	Алгоритм в целом верен, но есть существенные синтаксические и семантические ошибки.
1-5	Реализованный алгоритм не соответствует задаче, но есть верные идеи