Время выполнения заданий – 240 минут

Максимальное количество баллов - 100

Задание 1 (15 баллов)

Вася прибавил к числителю и знаменателю правильной дроби одно и то же натуральное число, меньшее, как числителя, так и знаменателя. В результате дробь увеличилась более, чем на 50%. Вася утверждает, что, если он отнимет это число от числителя и знаменателя исходной дроби, то дробь уменьшится менее, чем на 50%. Может ли так быть?

Задание 2 (15 баллов)

В коробке лежат шарики двух цветов: синего и красного (оба цвета присутствуют). Известно, что синих шариков больше, а два шарика одного цвета можно вынуть с той же вероятностью, что и два шарика разных цветов. Чему может быть равна разность между числом синих и красных шариков? Дайте полный и обоснованный ответ на этот вопрос.

Задание 3 (15 баллов)

В ряд расставлены 2020 натуральных чисел так, что среди любых шести чисел, идущих подряд, первое число нацело делится на последнее, и среди любых девяти чисел, идущих подряд, последнее число нацело делится на первое. Докажите, что сумма первых ста чисел нацело делится на сумму последних ста чисел.

Задание 4 (15 баллов)

Найдите все четвёрки натуральных чисел a, b, c, d, для которых выполнены равенства

$$\begin{cases} a + b = cd \\ c + d = ab \end{cases}$$

Задание 5 (15 баллов)

В треугольнике ABC угол B равен 80°. На стороне BC отмечена точка D такая, что AB = AD = CD; на стороне AB отмечена точка F такая, что AF = BD. На отрезке AC отмечена точка E такая, что AB = AE. Найдите угол AEF.

Задание 6 (25 баллов)

В ряд стоят n домов k различных цветов, причем для любого цвета найдутся 100 стоящих подряд домов, среди которых домов этого цвета строго больше, чем домов любого другого цвета. При каком наибольшем k это возможно, если:
а) n=404?
б) n=406?