

Задача 1.

Полный балл — 6

Найдите наибольшее целое число x , удовлетворяющее неравенству $|x^2 - 2x| < 2020$.

Задача 2.

Полный балл — 7

В равнобедренном треугольнике ABC одна из сторон видна из центра описанной окружности O под углом 100° . Какое наименьшее значение (в градусах) может принимать угол A этого треугольника?

Задача 3.

Полный балл — 8

При каком наибольшем n на доску 100×100 можно поставить n ладей и n полуладей (бьют ближайшие фигуры в двух направлениях из четырёх возможных по вертикали и горизонтали, причём у каждой полуладьи могут быть свои два направления) так, чтобы никакая фигура никакую не била?

Задача 4.

Полный балл — 9

Найдите наименьшее значение произведения $(1 + x)(1 + 3y)(1 + 9z)$, если x, y и z — положительные числа, произведение которых равно 1.

Задача 5.

Полный балл — 10

Дан 21-вершинный многогранник, у которого все вершины имеют целочисленные координаты. Точку в пространстве назовём *особой*, если она является серединой отрезка с концами в вершинах этого многогранника и имеет только целочисленные координаты. Какое наименьшее количество особых точек может быть?

Задача 6.

Полный балл — 10

На стороне AB треугольника ABC отмечена точка C_1 так, что $AC_1 = 2$, $C_1B = 3$. Биссектриса AE делит сторону BC в отношении $BE : EC = 1 : 2$. Найдите B_1C , где B_1 — вторая точка пересечения описанной около треугольника BCC_1 окружности с лучом AC .

Задача 7.

Полный балл — 11

Пусть N — количество способов выбрать не менее двух чисел из набора $1, 2, 3, \dots, 2020$ так, чтобы никакие два выбранных числа в сумме не давали 2021. Найдите остаток числа N при делении на 10.

Задача 8.

Полный балл — 12

Натуральное число назовём *простецким*, если все его положительные делители разбиваются на пары с суммой, равной простому числу. Сколько простецких чисел в первой сотне?

Задача 9.

Полный балл — 13

Найдите квадрат минимальной суммы расстояний до вершин от точки внутри треугольника со сторонами 3, 5 и углом 30° между ними.

Задача 10.

Полный балл — 14

Найдите целочисленный корень уравнения $f(x) = 0$, если функция $f(x)$ определена при всех действительных x и удовлетворяет условию $4f(x) + 9f(1-x) = x^2$.