

Время выполнения задания: 240 минут.

*Информация для участников: максимальная оценка за каждую задачу — 20 баллов, независимо от сложности задачи. Максимальная оценка за всю работу — 100 баллов. Если сумма баллов, набранных участником по всем задачам, превосходит 100, его итоговая оценка равна 100.*

1. В компании из 6 человек некоторые компаниями по трое ходили вместе в походы. Верно ли, что среди них найдутся четверо, среди которых каждые трое ходили вместе в поход, либо четверо, где никакие трое не ходили вместе в поход?

2. На окружности с центром  $O$  расположим шестёрку точек  $P_1, \dots, P_6$ . Назовём шестёрку *интересной*, если  $\overrightarrow{OP_1} + \dots + \overrightarrow{OP_6} = 0$ , и все углы  $\angle P_i O P_j$  целые в градусах. Назовём шестёрку *скучной*, если она переводится в себя отражением от точки  $O$  или поворотом вокруг  $O$  на  $120^\circ$ . Существуют ли интересные нескучные шестёрки точек на окружности?

3. Выпуклый многогранник имеет 8 вершин и 6 четырёхугольных граней. Может ли проекция этого многогранника на некоторую плоскость оказаться правильным 8-угольником?

4. Тройка целых чисел  $(x, y, z)$ , наибольший общий делитель которых равен 1, является решением уравнения

$$y^2z + yz^2 = x^3 + x^2z - 2xz^2.$$

Докажите, что  $z$  является кубом целого числа.

5. Числа  $P_1, \dots, P_n$  являются перестановкой набора чисел  $\{1, \dots, n\}$  (то есть каждое  $P_i$  равно одному из  $1, \dots, n$ , и все  $P_i$  различны). Докажите неравенство

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{P_i + P_{i+1}} > \frac{n-1}{n+2}.$$

6. Высоты  $AA_1, BB_1, CC_1$  остроугольного треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $H$ . Пусть  $M$  — середина стороны  $BC$ ,  $K$  — середина  $B_1C_1$ . Докажите, что окружность, проходящая через  $K, H$  и  $M$ , касается  $AA_1$ .