



**Межрегиональная олимпиада школьников  
«Высшая проба»**

**2015-2016 учебный год**

**МАТЕРИАЛЫ ЗАДАНИЙ ОТБОРОЧНОГО И  
ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНОГО ЭТАПОВ ОЛИМПИАДЫ,  
ОТВЕТЫ НА ЗАДАНИЯ ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНОГО ЭТАПА**

**ЗАДАНИЯ ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНОГО  
ЭТАПА  
МАТЕМАТИКА**

**Время выполнения задания: 240 минут.**

*Информация для участников: максимальная оценка за каждую задачу — 20 баллов, независимо от сложности задачи. Максимальная оценка за всю работу - 100 баллов. Если сумма баллов, набранных участником по всем задачам, превосходит 100, его итоговая оценка равна 100.*

*Задача считается решенной, если Вы не только указали правильный ответ, но и записали полное решение.*

1. В ряд выписаны цифры 987654321. Поставьте между ними ровно два знака минус так, чтобы значение полученного выражения было минимальным. (Например, при расстановке  $9876 - 54 - 321$  получается 9501.)
2. Найдите наименьшее целое положительное число, представимое в виде  $20x^2 + 80xy + 95y^2$  для некоторых целых чисел  $x$  и  $y$ . Строго обоснуйте ответ.
3. Болельщики Спартака говорят правду, когда Спартак выигрывает, и лгут, когда он проигрывает. Аналогично ведут себя болельщики Динамо, Зенита и Локомотива. После двух матчей с участием этих четырех команд, каждая из которых закончилась победой одной из команд, а не ничьей, из болельщиков, смотревших трансляцию, на вопрос "болеете ли вы за Спартак?" положительно ответили 200 человек, на вопрос "болеете ли вы за Динамо?" положительно ответили 300 человек, на вопрос "болеете ли вы за Зенит?" положительно ответили 500 человек, на вопрос "болеете ли вы за Локомотив?" положительно ответили 600 человек. Сколько человек болело за каждую из команд?
4. Треугольник со сторонами 2, 3 и 3 разрезали на четыре подобных ему треугольника. Каковы могут быть коэффициенты подобия?
5. На доске написаны числа  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{100}$ . Разрешается стереть любые два числа  $a$  и  $b$  и записать вместо них  $1 + 2a + 2b + 2ab$ . После нескольких таких операций на доске осталось одно число. Чему оно может быть равно?
6. Слова языка роботов планеты Шелезяка — последовательности стрелочек "вверх", "вниз", "влево" и "вправо", причём две противоположенные стрелочки не могут стоять рядом. Учитель написал на доске 1000000 слов этого языка. Четыре ученика переписывают слова к себе в тетрадь, делая следующие изменения: ученик  $U$  приписывает перед словом стрелочку вверх, а если это запрещено (слово начинается с "вниз"), то убирает это первое "вниз", ученики  $D$ ,  $L$ ,  $R$  делают всё то же самое, только приписывают соответственно стрелку вниз, влево или вправо, и вычёркивают первый символ, если он оказался "вверх", "вправо", "влево". Докажите, что в одной из четырёх тетрадей минимум половина (500000) слов не будет встречаться среди слов на доске.