Межрегиональная многопрофильная олимпиада 2010, второй этап
Вариант 1
Задания 1-10
Методика проверки

1. Найдите значение параметра p, при котором сумма квадратов всех различных корней уравнения $(\star)$ $x^3-(p+2)x^2+4px-2xp^2=0$ принимает наименьшее возможное значение.

⧫ 2/3

Решение. (1) $x^3-(p+2)x^2+4px-2xp^2=0 \Leftrightarrow x\big(x^2-(p+2)x+4p-2p^2\big)=0$
$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0, \\ x^2-(p+2)x+4p-2p^2=0. \end{array}\right.$

(2) Найдем дискриминант,
$D=(p+2)^2-4(4p-2p^2)=p^2+4p+4-16p+8p^2=9p^2-12p+4=(3p-2)^2$.

(3) Найдем корни,
$x_{1,2}=\dfrac{p+2\pm(3p-2)}{2}=\{2p;2-p\}$, $x_3=0$.

(4) Заметим, что уравнение $(\star)$ имеет в зависимости от величины параметра p ровно два различных корня (при $p\in\{0;\,2;\,2/3\}$) или ровно три различных корня (при всех остальных значениях p).

(5) Найдем сумму квадратов всех различных корней при $p\neq 2/3$,
$S=x_1^2+x_2^2+x_3^2=(2p)^2+(2-p)^2=4p^2+4-4p+p^2=5p^2-4p+4=5(p-2/5)^2-4/5+4$
$=5(p-2/5)^2+16/5$, наименьшее значение достигается при $p_1=\dfrac{2}{5}$, и тогда $S=16/5=3{,}2$.

(6) Найдем сумму квадратов всех различных корней при $p=2/3$, $p_1=p_2=4/3$, два различных корня равны в этом случае $2/3$ и 0, $S=16/9=1{,}(7)<3{,}2$, поэтому верный ответ $p=2/3$. ■

2. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции
$(\star)$ $f(x)=3\cos^4x-14\cos^3x-21\sin^2x-12\cos x$.

⧫ $\{-373/16;\,29\}$

Решение. (1) $f(x)=3\cos^4x-14\cos^3x-21\sin^2x-12\cos x$
$=3\cos^4x-14\cos^3x-21+21\cos^2x-12\cos x \Leftrightarrow \begin{cases} t=\cos x, \\ f(x)=3t^4-14t^3-21+21t^2-12t \end{cases} \Leftrightarrow$
$\begin{cases} t=\cos x, \\ f(x)=3t^4-14t^3+21t^2-12t-21. \end{cases}$ Так как $\cos x\in[-1;\,1]$, то множество значений функции $(\star)$ совпадает со множеством значений функции
$(\star\star)$ $g(t)=3t^4-14t^3+21t^2-12t-21$
на промежутке $t\in[-1;\,1]$.

(2) Пусть сначала функция $(\star\star)$ определена на всей числовой оси. Тогда $g'(t)=12t^3-42t^2+42t-12$
$=12(t^3-1)-42(t^2-t)=12(t-1)(t^2+t+1)-42t(t-1)=6(t-1)\big[2(t^2+t+1)-7t\big]$
$=6(t-1)\big[2t^2+2t+2-7t\big]=6(t-1)\big(2t^2-5t+2\big)$.

(3) $2t^2-5t+2=0 \Leftrightarrow t=\dfrac{5\pm\sqrt{25-16}}{4}$ $t=\dfrac{5\pm\sqrt{9}}{4}$ $t=\dfrac{5\pm 3}{4}\in\{-1/2;\,2\}$, поэтому
$g'(t)=6(t-1)(t-2)(2t-1)$. Функция $g(t)$

(3a) убывает на промежутке $t\in(-\infty;\,1/2]$,

(3b) возрастает на промежутке $t\in[1/2;\,1]$,

(3c) убывает на промежутке $t\in[1;\,2]$,

(3d) возрастает на промежутке $t\in[2;\,+\infty)$,

(4) Пусть теперь функция $(\star)$определена на промежутке $t\in[-1;\,1]$. Тогда $g(t)$

(4a) убывает на промежутке $t\in[-1;\,1/2]$,

(4b) возрастает на промежутке $t\in[1/2;\,1]$.

(5) Наименьшее значение $g(t)$ совпадает с числом $g(\frac{1}{2})=\dfrac{3}{16}-\dfrac{14}{8}+\dfrac{21}{4}-\dfrac{12}{2}-21$
$=\dfrac{3}{16}-\dfrac{28}{16}+\dfrac{84}{16}-6-21=\dfrac{3-28+84}{16}-27=\dfrac{59}{16}-27=\dfrac{64-5}{16}-27=-\dfrac{5}{16}+4-27=-23-\dfrac{5}{16}=-\dfrac{373}{16}$.

(6) Наибольшее значение $g(t)$ совпадает с большим из двух чисел

(6a) $g(-1)=3+14+21+12-21=29$,

(6b) $g(1)=3-14+21-12-21=-23$,
поэтому наибольшее значение равно 29. ■

3. Решите неравенство $\log_{0,1x^2-1,1x+2,8}\dfrac{x^3-14x^2+40x}{15}\leqslant 1$.

♦ $x\in(0;1]\bigcup(2;4)\bigcup(10;10{,}5]$.

Решение. (1) $\log_{0,1x^2-1,1x+2,8}\dfrac{x^3-14x^2+40x}{15}\leqslant 1$

$$\Leftrightarrow \log_{\frac{x^2-11x+28}{10}}\frac{x^3-14x^2+40x}{15}\leqslant \log_{\frac{x^2-11x+28}{10}}\frac{x^2-11x^2+28}{10}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\frac{x^2-11x+28}{10}>1,\\ \frac{x^3-14x^2+40x}{15}\leqslant\frac{x^2-11x+28}{10},\\ \frac{x^3-14x^2+40x}{15}>0,\end{cases}\\ \begin{cases}0<\frac{x^2-11x+28}{10}<1,\\ \frac{x^3-14x^2+40x}{15}\geqslant\frac{x^2-11x+28}{10},\\ \frac{x^2-11x+28x}{10}>0,\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}(x-2)(x-9)>0,\\ (x-4)(2x^2-23x+21)\leqslant 0,\\ x(x-4)(x-10)>0,\end{cases}\\ \begin{cases}(x-4)(x-7)>0,\\ (x-2)(x-9)<0,\\ (x-4)(2x^2-23x+21)\geqslant 0,\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\in(-\infty;2)\bigcup(9;+\infty),\\ x\in(-\infty;1]\bigcup[4;10{,}5],\\ x\in(0;4)\bigcup(10;+\infty),\end{cases}\\ \begin{cases}x\in(-\infty;4)\bigcup(7;+\infty),\\ x\in(2;9),\\ x\in[1;4]\bigcup[10{,}5;+\infty),\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\in(0;1],\\ x\in(10;10{,}5],\\ x\in(2;4).\end{array}\right.\ ■$$

4. Для защиты ценного оборудования от непогоды требуется изготовить палатку в форме пирамиды, в основании которой должен лежать прямоугольник, а одно из боковых ребер должно быть перпендикулярно основанию. Найдите наибольший возможный объем палатки при условии, что ни одно из ребер пирамиды не должно быть длиннее 2 метров.

♦ $8/(9\sqrt{3})$.

Решение. (1) Пусть в основании лежит прямоугольник, стороона которого равны x и y, а высота равна z. Тогда условия задачи равносильны требованию найти такие x,y,z, что $\dfrac{xyz}{3}\Rightarrow\max$ при одновременном выполнении условий $0<x\leqslant 2$, $0<y\leqslant 2$, $0<z\leqslant 2$, $0<\sqrt{x^2+z^2}\leqslant 2$, $0<\sqrt{y^2+z^2}\leqslant 2$, $0<\sqrt{x^2+y^2+z^2}\leqslant 2$. Эта система условий равносильна системе $x>0$, $y>0$, $z>0$, $x^2+y^2+z^2\leqslant 4$.

(2) Пусть палатка наибольшего объема имеет высоту, равную z. Докажем, что $x=y$. При заданном z условие $\dfrac{xyz}{3}\Rightarrow\max$ равносильно условию $\begin{cases}x>0,\ y>0, xy\Rightarrow\max,\\ x^2+y^2+z^2\leqslant 4\end{cases}$ $\begin{cases}x>0,\ y>0, xy\Rightarrow\max,\\ y^2+y^2\leqslant 4-z^2.\end{cases}$ В соответствии с неравенством Коши, $x=y=\sqrt{4-z^2}$.

(3) Таким образом, в основании лежит квадрат со стороной x. Тогда условия задачи равносильны требованию найти такие x,z, что $\dfrac{x^2z}{3}\Rightarrow\max$ при одновременном выполнении условий $0<x\leqslant 2$, $0<z\leqslant 2$, $2x^2+z^2\leqslant 4$, $x=\sqrt{4-z^2}$. Рассмотрим функцию $f(z)=\dfrac{(4-z^2)\cdot z}{3}$ и условие $f(z)\Rightarrow\max\Leftrightarrow \dfrac{(4-z^2)\cdot z}{3}\Rightarrow\max\Leftrightarrow(4-z^2)\cdot z\Rightarrow\max\Leftrightarrow 4z-z^3\Rightarrow\max$. Пусть $g(z)=4z-z^3$, $g'(z)=4-3z^2$, $4-3z^2=0$ при $z=2/\sqrt{3}$. Исследование знака производнлой показывает, что это точка максимума.

(4) Таким образом, $x^2+y^2+z^2=4$, $3x^2=4$, $x=y=z=2/\sqrt{3}$, $V=x^3/3=8/(9\sqrt{3})$. ■

5. В начале года предприниматель взял на год кредит в банке $\mathcal{A}$ на 80% требуемой ему суммы под n% годовых, остальные деньги занял на год в банке $\mathcal{B}$ под $3n$% годовых. Однако из—за кризиса в конце года расплатиться не смог и ему пришлось продлить договор в каждом банке еще на год, причем банк $\mathcal{A}$ установил ему на второй год $2n$% годовых, а банк $\mathcal{B}$ установил $4n$% годовых. В результате он вернул через два года всего 1440 у.е., в то время как планировал вернуть через год 960 у.е. Найдите величину вклада и банковский процент в каждом банке.

♦ В соответствии с условиями задачи, возможно два верных ответа. **(1)** В первый год 600 у.е. и 20%, 150 у.е. и 60%. **(2)** В первый год 544 у.е. и 500/17%, 136 у.е. и 1500/17%.

Решение 1. Решим задачу в предположении, что просроченные выплаты процентов по кредиту капитализируются, т.е. неуплаченные проценты прибавляются к основной сумме долга. Пусть вся сумма кредита равна $5m$ и $x = n/100$. Тогда полный долг по состоянию на окончание первого года равен $4m(1+x)+m(1+3x)$. В соответствии с условием задачи, $4m(1+x)+m(1+3x) = 960$. Эта величина рассматривается как сумма кредита на второй год. Тогда полный долг по состоянию на окончание второго года равен $4m(1+x)(1+2x)+m(1+3x)(1+4x)$. В соответствии с условием задачи, $4m(1+x)(1+2x)+m(1+3x)(1+4x) = 1440$. Решая систему
$\begin{cases} m>0,\ x>0, \\ 4m(1+x)+m(1+3x)=960, \\ 4m(1+x)(1+2x)+m(1+3x)(1+4x)=1440 \end{cases}$ методом исключения, получим единственное решение $m = 150$, $x = 0{,}2$. ■

Решение 2. Решим задачу в предположении, что просроченные выплаты процентов по кредиту не капитализируются, т.е. неуплаченные проценты не прибавляются к основной сумме долга. Пусть вся сумма кредита равна $5m$ и $x = n/100$. Тогда полный долг по состоянию на окончание первого года равен $4m(1+x)+m(1+3x)$. В соответствии с условием задачи, $4m(1+x)+m(1+3x) = 960$. Полный долг по состоянию на окончание второго года равен $4m(1+x+2x)+m(1+3x+4x)$. В соответствии с условием задачи, $4m(1+x+2x)+m(1+3x+4x) = 1440$. Решая систему $\begin{cases} m>0,\ x>0, \\ 4m(1+x)+m(1+3x)=960, \\ 4m(1+3x)+m(1+7x)=1440, \end{cases}$ методом исключения, получим единственное решение $m = 136$, $x = 5/17$. ■

6. Найдите все значения параметров p и q, при которых система $\begin{cases} y = px^2 - q, \\ 2y + \big||6x| - 3|y|\big| = 12 \end{cases}$ имеет ровно три решения.

♦ $\begin{cases} q = -12/5, \\ p \in (-\infty;\ -3/5) \bigcup [0;\ +\infty); \end{cases}$ $\begin{cases} q = 12, \\ p \in (-\infty;\ -1/40) \bigcup [0;\ 2) \bigcup (3;\ +\infty). \end{cases}$

Решение. (1) Множество точек на плоскости $2y + \big||6x| - 3|y|\big| = 12$ симметрично относительно оси Oy. Нарисуем его правую половину,

$$(\star)\quad \begin{cases} 2y + \big||6x| - 3|y|\big| = 12, \\ x \geqslant 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2y + \big|6x - 3|y|\big| = 12, \\ x \geqslant 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2y + |6x-3y| = 12, \\ y > 2x, \end{cases} \\ \begin{cases} 2y + |6x-3y| = 12, \\ 0 < y \leqslant 2x, \end{cases} \\ \begin{cases} 2y + |6x+3y| = 12, \\ -2x < y \leqslant 0, \end{cases} \\ \begin{cases} 2y + |6x+3y| = 12, \\ y \leqslant -2x, \end{cases} \end{array} \right. \\ x \geqslant 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = 6/5x + 12/5, \\ y > 2x, \end{cases} \\ \begin{cases} y = 6x - 12, \\ 0 < y \leqslant 2x, \end{cases} \\ \begin{cases} y = -6/5x + 12/5, \\ -2x < y \leqslant 0, \end{cases} \\ \begin{cases} y = -6x - 12, \\ y \leqslant -2x, \end{cases} \end{array} \right. \\ x \geqslant 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = (6x+12)/5, \\ 0 \leqslant x \leqslant 3, \\ 12/5 \leqslant y \leqslant 6, \end{cases} \\ \begin{cases} y = 6x - 12, \\ 2 \leqslant x \leqslant 3, \\ 0 \leqslant y \leqslant 6, \end{cases} \\ \begin{cases} y = (-6x+12)/5, \\ 2 \leqslant x < +\infty, \\ 0 \geqslant y > -\infty, \end{cases} \\ \begin{cases} y = -6x - 12, \\ 0 \leqslant x < +\infty, \\ -12 \geqslant y > -\infty, \end{cases} \end{array} \right.$$

Таким образом, множество $(\star)$ образовано
отрезком AB, где $A(0;\ 12/5)$, $B(3;\ 6)$,
отрезком BC, где $B(3;\ 6)$, $C(2;\ 0)$,
полупрямой α, начинающейся в точке $C(2;\ 0)$, и проходящей через точку $M(7;\ -6)$,
и полупрямой β, начинающейся в точке $D(-12;\ 0)$, и проходящей через точку $N(3;\ -30)$.

(2) Так как требуется нечетное число решений, то одно из них должно соответствовать $x = 0$, поэтому $q \in \{-12/5;\ 12\}$.

(3) Пусть $q = -12/5$ и $p \geqslant 0$, так что парабола $y = px^2 - q$ направлена ветвями вверх. Тогда ровно три решения будет **(3a)** или при условии, что парабола $y = px^2 - q$ пересекает отрезок AB, $p \in [2/5;\ +\infty)$,

(3b) или при условии, что парабола $y = px^2 - q$ пересекает отрезок BC, и ее ветви направлены вверх, $p \in [0;\ 2/5]$, $p = 0$ тоже годится, в этом случае $y = px^2 - q$ линейная функция.
(4) Пусть $q = -12/5$ и $p < 0$, так что парабола $y = px^2 - q$ направлена ветвями вниз. Тогда ровно три решения будет при условии, что парабола $y = px^2 - q$ проходит ниже точки C и пересекает полупрямую DN, $p \in (-\infty;\ -3/5)$.
(5) Пусть $q = 12$ и $p \geqslant 0$, так что парабола $y = px^2 - q$ направлена ветвями вверх. Тогда ровно три решения будет **(5a)** или при условии, что парабола $y = px^2 - q$ проходит выше точки C и пересекает отрезок AB, $p \in (3;\ +\infty)$, **(5b)** или при условии, что парабола $y = px^2 - q$ проходит ниже точки B и пересекает полупрямую CM, $p \in [0;\ 2)$, $p = 0$ тоже годится.
(6) Пусть $q = 12$ и $p < 0$, так что парабола $y = px^2 - q$ направлена ветвями вниз. Тогда ровно три решения будет при условии, что парабола $y = px^2 - q$ не имеет общих точек с полупрямой CM, и пересекает полупрямую DN, $p \in (-\infty;\ -1/40)$. ■

7. На стороне AB треугольника ABC взята точка D. В треугольнике ADC проведены биссектрисы AP и CQ. На стороне AC треугольника ADC взята точка R так, что $PR \perp CQ$. Известно, что биссектриса угла D треугольника BCD перпендикулярна отрезку PB, $AB = 18$, $AP = 12$. Найдите AR.
⧫ 8.
Решение. Пусть $AB = n$, $AP = m$, $AD = c$, $AC = b$, $DP = p$, $CP = q$, $BD = DP = p$, $CP = CR = q$.
Используя свойство биссектрисы и формулу для длины биссектрисы, получим $\begin{cases} \frac{c}{b} = \frac{p}{q}, \\ c + p = AB = n, \\ m^2 = bc - pq, \end{cases}$

$$\begin{cases} c = \frac{bp}{q}, \\ \frac{bp}{q} + p = n, \\ m^2 = b\frac{bp}{q} - pq, \end{cases} \quad \begin{cases} c = \frac{bp}{q}, \\ bp + pq = qn, \\ m^2 = b\frac{bp}{q} - pq, \end{cases} \quad \begin{cases} c = \frac{bp}{q}, \\ p = \frac{qn}{b+q}, \\ m^2 = b\frac{b}{q}\frac{qn}{b+q} - q\frac{qn}{b+q}, \end{cases} \quad m^2 = \frac{b^2n}{b+q} - \frac{q^2n}{b+q},\ m^2 = \frac{(b^2-q^2)n}{b+q},$$

$$m^2 = \frac{(b-q)(b+q)n}{b+q},\ m^2 = (b-q)n,\ b - q = \frac{m^2}{n},\ b - q = \frac{12^2}{18} = 8.\ ■$$

8. Найдите все точки минимума и точки максимума функции $f(x) = (x^2 - 3x - 9) \cdot \sqrt{x^2 - 6x + 9}$.
⧫ $x_{\min} \in \{0;\ 4\}$, $x_{\max} \in \{3\}$.
Решение. (1) $(x^2 - 3x - 9) \cdot \sqrt{x^2 - 6x + 9} = (x^2 - 3x - 9) \cdot \sqrt{(x-3)^2} = (x^2 - 3x - 9) \cdot |x - 3|$
$= \begin{cases} -(x^2 - 3x - 9)(x - 3) \text{ при } x \leqslant 3, \\ \ \ (x^2 - 3x - 9)(x - 3) \text{ при } x \geqslant 3 \end{cases} = \begin{cases} -(x^3 - 6x^2 + 27) \text{ при } x \leqslant 3, \\ \ \ x^3 - 6x^2 + 27 \text{ при } x \geqslant 3. \end{cases}$
(2) Пусть $g(x) = x^3 - 6x^2 + 27$. Тогда $g'(x) = 3x^2 - 12x = 3x(x - 4)$,

- $g'(x) > 0$ на промежутке $x \in (-\infty;\ 0)$,
- $g'(x) < 0$ на промежутке $x \in (0;\ 4)$,
- $g'(x) > 0$ на промежутке $x \in (4;\ +\infty)$.

Поэтому функция $g(x)$

- возрастает на промежутке $x \in (-\infty;\ 0]$,
- убывает на промежутке $x \in [0;\ 4]$,
- возрастает на промежутке $x \in [4;\ +\infty)$.

(3) Так как $f(x) = \begin{cases} -g(x) \text{ при } x \leqslant 3, \\ \ \ g(x) \text{ при } x \geqslant 3, \end{cases}$ то функция $f(x)$

- убывает на промежутке $x \in (-\infty;\ 0]$,
- возрастает на промежутке $x \in [0;\ 3]$,
- убывает на промежутке $x \in [3;\ 4]$,

- возрастает на промежутке $x \in [4;\ +\infty)$.

Поэтому

- $x = 0$ является точкой минимума,
- $x = 3$ является точкой максимума,
- $x = 4$ является точкой минимума

функции $f(x)$. ■

9. Найдите все значения переменных $x > 0$, $y > 0$ такие, что хотя бы при одном значении z верны одновременно равенства $(\star)$ $\dfrac{(x^2+1)^2}{x^2} + \dfrac{(y^2+1)^2}{y^2} = \dfrac{50z}{4+z^2}$ и $(\star\star)$ $x + y = 1$.

♦ $\{(\frac{1}{2};\ \frac{1}{2})\}$.

Решение 1.

(1) Пусть $x = (1+t)/2$, $y = (1-t)/2$, $t \in (-1;\ 1)$. Тогда $F = \dfrac{(x^2+1)^2}{x^2} + \dfrac{(y^2+1)^2}{y^2} = \Big(x + \dfrac{1}{x}\Big)^2 + \Big(y + \dfrac{1}{y}\Big)^2$ $= x^2 + \dfrac{1}{x^2} + 2 + y^2 + \dfrac{1}{y^2} + 2 = \dfrac{(1+t)^2}{4} + \dfrac{(1-t)^2}{4} + \dfrac{4}{(1+t)^2} + \dfrac{4}{(1-t)^2} + 4 = \dfrac{2t^2+2}{4} + 4\dfrac{2t^2+2}{(1-t^2)^2} + 4$. Пусть $t^2 = s \in [0;\ 1)$. Тогда $F = \dfrac{s+1}{2} + 8\dfrac{s+1}{(1-s)^2} + 4$. Эта функция возрастает на промежутке $[0;\ 1)$, поэтому ее наименьшее значение достигается при $s = 0$, и это наименьшее значение равно 12,5.

(2) Пусть $g(z) = \dfrac{50z}{4+z^2}$. Из условия задачи следует, что $F(x,y) = g(z)$, причем $F > 0$. Поэтому равенство может иметь место только при $z > 0$. При этом условии $g(z) = \dfrac{50}{\frac{4}{z} + z}$. Так как по уже упоминавшемуся неравенству Коши $\dfrac{4}{z} + z \geqslant 2\sqrt{\dfrac{4}{z}\cdot z} = 4$, то $\dfrac{50}{\frac{4}{z}+z} \leqslant \dfrac{50}{4} = 12{,}5$, причем равенство имеет место если и только если $\frac{4}{z} = z > 0 \Leftrightarrow z = 2$.

(3) Итак, равенство $(\star)$ равносильно одновременному выполнению условий $\begin{cases} F = g(z), \\ F \geqslant 12{,}5, \\ g(z) \leqslant 12{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow$ $\begin{cases} F = 12{,}5, \\ g(z) = 12{,}5, \end{cases}$ причем равенство $F = 12{,}5$ верно если и только если $x = y = 0{,}5$, а равенство $g(z) = 12{,}5$ верно если и только если $z = 2$. ■

Решение 2. **(4)** Так как для любых u и v верно неравенство $u^2 - 2uv + v^2 \geqslant 0$, то при тех же условиях $2u^2 - 2uv + 2v^2 \geqslant u^2 + v^2$, $2u^2 + 2v^2 \geqslant u^2 + 2uv + v^2$, $2(u^2+v^2) \geqslant (u+v)^2$, $u^2 + v^2 \geqslant \dfrac{(u+v)^2}{2}$.

(5) Пусть $u = \dfrac{(x^2+1)^2}{x^2}$, $v = \dfrac{(y^2+1)^2}{y^2}$, тогда $F = \dfrac{(x^2+1)^2}{x^2} + \dfrac{(y^2+1)^2}{y^2} = u^2 + v^2 \geqslant \dfrac{\Big(x + \dfrac{1}{x} + y + \dfrac{1}{y}\Big)^2}{2}$ $\geqslant \dfrac{(x + y + \dfrac{x+y}{xy})^2}{2}$.

(6) Так как $x + y = 1$, то $F \geqslant \dfrac{\Big(1 + \dfrac{1}{xy}\Big)^2}{2}$

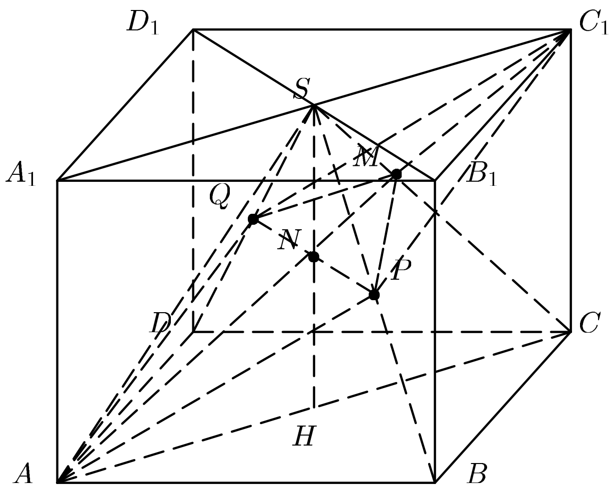
(7) Для любых $x \geqslant 0, y \geqslant 0$ верно неравенство Коши, $\dfrac{x+y}{2} \geqslant \sqrt{xy}$, поэтому при тех же условиях $x + y \geqslant 2\sqrt{xy}$. Так как $x + y = 1$, то $1 \geqslant 2\sqrt{xy}$, $1 \geqslant 4xy$, $xy \leqslant 1/4$. Если к тому же $x > 0, y > 0$, то $\dfrac{1}{xy} \geqslant 4$, $1 + \dfrac{1}{xy} \geqslant 5$, $\Big(1 + \dfrac{1}{xy}\Big)^2 \geqslant 25$, $F \geqslant 12{,}5$. Так как $x + y = 2\sqrt{xy}$ только при $x = y$, то соответственно $F = 12{,}5$ только при $x = y = 0{,}5$.

(8) Завершение аналогично решению 1. ■

10. Все ребра правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ равны b. Высота правильной четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна высоте указанной пирамиды, основание $ABCD$ у них общее. **(1)** Через точки A и C_1 проведена плоскость α параллельно прямой BD. Найдите величину площади многоугольника, образовавшегося при пересечении плоскости α и пирамиды $SABCD$.
(2) Через точки B и D_1 проведена плоскость β. Найдите минимально возможную величину площади многоугольника, образовавшегося при пересечении плоскости β и пирамиды $SABCD$.

♦ $b^2\sqrt{5}/6$. Эта величина равна также наименьшей площади указанного в условии задачи многоугольника.

Решение.



(1) $BD = b\sqrt{2}$, $DQ = QS$, $BP = PS$, $PQ \parallel BD$, треугольники SBD и SPQ подобны с коэффициентом подобия $2:1$, $PQ = BD/2 = b/\sqrt{2}$.

(2) $AC_1 = b\sqrt{5/2}$, $HN = NS$, $AN = NC_1$, $AN = AC_1/2$, треугольники SMN и CMC_1 подобны с коэффициентом подобия $1:2$, $NM = AC_1/6$, $AM = (2/3)AC_1$,

(3) $S_{AQC_1P} = \dfrac{1}{2}AM \cdot QP = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2}{3} \cdot b\sqrt{\dfrac{5}{2}} \cdot b\sqrt{\dfrac{1}{2}} = b^2 \cdot \dfrac{1}{3} \cdot \sqrt{\dfrac{5}{4}} = b^2\dfrac{\sqrt{5}}{6}$.

(4) Теорема 1. Длина биссектрисы треугольника меньше полусуммы двух прилежащих сторон.

Доказательство. Длина биссектрисы равна $l_c = \sqrt{ab - c_ac_b} = \sqrt{(\sqrt{ab})^2 - c_ac_b} \leqslant \sqrt{\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 - c_ac_b}$

$$= \frac{a+b}{2}\sqrt{1 - \frac{4c_ac_b}{(a+b)^2}} < \frac{a+b}{2}.$$

(5) Пусть прямая l_A параллельна BD_1 и проходит через точку A, прямая l_S параллельна BD_1 и проходит через точку S, прямая l_C параллельна BD_1 и проходит через точку C. Пусть плоскость β проходит через точки B, D_1 и пересекает AS в точке E, пересекает CS в точке F, пересекает SD в точке G. Пусть прямая l_E параллельна BD_1 и проходит через точку E, прямая l_F параллельна BD_1 и проходит через точку F. Тогда площадь многоугольника $BEGF$ равна половине произведения длины отрезка GB на расстояние между прямыми l_E и l_F. Из теоремы 1 теперь следует, что наименьшее возможное расстояние между прямыми l_E и l_F имеет место в том и только том случае, когда $EF \parallel AC$.
■