Решения задач
11 класс

1. Можно ли расположить на плоскости 2010 лучей таким образом, чтобы ни через какую точку плоскости не проходило более двух лучей, каждый луч пересекался ровно с двумя другими и любые две точки на любых двух лучах можно было соединить ломаной, целиком содержащейся в объединении этих лучей?

Решение. Это можно сделать. Вот одна из возможных конструкций. Если $A_1A_2\dots A_{2010}$ — правильный 2010-угольник, то набор лучей A_1A_2, $A_2A_3, \dots A_{2010}A_1$ удовлетворяет условию задачи. В самом деле, для любой пары точек $M \in A_kA_{k+1}$, $N \in A_lA_{l+1}$, где $k < l$, ломаная $MA_{k+1}A_{k+2}\dots A_lN$ целиком лежит в объединении данных 2010 лучей. Докажем, что луч A_kA_{k+1} пересекается только с двумя соседними лучами. Действительно, без ограничения общности можно считать, что $k = 1$. Тогда, если $1005 < l < 2010$, то луч A_1A_2 полностью лежит в одной полуплоскости относительно прямой A_lA_{l+1}, а, если $2 < l \le 1005$, то луч A_lA_{l+1} полностью лежит в одной полуплоскости относительно прямой A_1A_2. Следовательно, луч A_1A_2 пересекается только с лучами A_2A_3 и $A_{2010}A_1$. *Ответ:* Можно.

2. Среди всех четверок натуральных чисел (k, l, m, n), $k > l > m > n$, найдите такую, что сумма $\frac{1}{k} + \frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n}$ меньше единицы и ближе всего к ней.

Решение. Во-первых, заметим, что при помощи “жадного алгоритма” (то есть выбирая последовательно числа n, m, l, k максимально возможными), получаем четверку $(43, 7, 3, 2)$:

$$1/43 + 1/7 + 1/3 + 1/2 = 1805/1806.$$

Таким образом, для искомой четверки (k, l, m, n), имеем $1/k + 1/l + 1/m + 1/n \ge 1805/1806$. Левая часть этого неравенства оценивается сверху как $4/n$. Следовательно, $n \le 3$, то есть $n = 2$ или $n = 3$.

Предположим, что $n = 3$. Тогда $3/m \ge 1805/1806 - 1/3$, то есть $m \le 4$. Значит, $m = 4$. Далее, $2/l \ge 1805/1806 - 1/3 - 1/4$, то есть $l \le 4$, противоречие.

Таким образом, $n = 2$. Допустим, $m = 4$. Тогда $2/l \ge 1805/1806 - 1/2 - 1/4$, то есть $l \le 8$. Кроме того $l \ge 5$ (так как $l > m$) и $1/k \ge 1805/1806 - 1/2 - 1/4 - 1/5$, то есть $k \le 20$. Это значит, что $klmn \le 2 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 20 = 1280 < 1806$, то есть

$$1 - (1/k + 1/l + 1/m + 1/n) \ge 1/(klmn) \ge 1/1280 > 1/1806,$$

и четверка (k, l, m, n) не оптимальна.

Допустим, $m \ge 5$. В любом случае, $3/m \ge 1805/1806 - 1/2$, то есть $m \le 6$. Тогда $2/l \ge 1805/1806 - 1/2 - 1/5$, то есть $l \le 6$. Кроме того, $l \ge 6$ (т.к. $l > m$) и $1/k \ge$

$1805/1806 - 1/2 - 1/5 - 1/6$, то есть $k \le 7$, и $klmn \le 2 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 7 = 504 < 1806$. Отсюда аналогичным образом заключаем, что четверка (k, l, m, n) не оптимальна.

Остается случай $m = 3$. Тогда $2/l \ge 1805/1806 - 1/2 - 1/3$, то есть $l \le 12$. Если $l \ge 8$, то $1/k \ge 1805/1806 - 1/2 - 1/3 - 1/8$, то есть $k \le 24$. Получаем $klmn \le 2 \cdot 3 \cdot 12 \cdot 24 = 1728 < 1806$, а это значит, что четверка не оптимальна. Следовательно, $l = 7$ и $k = 43$, то есть оптимальная четверка была найдена с самого начала.
Ответ: $(2, 3, 7, 43)$.

3. С натуральным числом производится следующая операция: отбрасывается самая правая цифра его десятичной записи, после чего к полученному после ее отбрасывания числу прибавляется удвоенная отброшенная цифра. Например: $157 \mapsto 15 + 2 \times 7 = 29$, $5 \mapsto 0 + 2 \times 5 = 10$. Натуральное число называется хорошим, если после многократного применения этой операции получаемое число перестает меняться. Найдите наименьшее 100-значное хорошее число.

Решение. Во-первых, заметим, что числа от 1 до 18 не являются хорошими, поскольку описанное преобразование переводит их друг в друга по циклу:

$$1 \to 2 \to 4 \to 8 \to 16 \to 13 \to 7 \to 14 \to 9 \to 18 \to 17 \to 15 \to 11 \to 3 \to 6 \to 12 \to 5 \to 10 \to 1.$$

Число 19, напротив, является хорошим. Значит, любое число, из которого в результате нескольких преобразований получается 19, также является хорошим.

Наименьшее 100-значное число — это 10^{99}. Ясно, что оно не является хорошим, т.к. преобразование, применённое 99 раз, переводит его в единицу.

Теперь рассмотрим следующее за ним число, $10^{99} + 1 = 100\ldots001$ (всего 98 нулей). Несложно проверить непосредственно, что оно хорошее. Действительно, преобразование, применённое 90 раз (т.е. пять циклов длины 18), переведёт его в число 1000000001. Далее,

$$1000000001 \to 100000002 \to 10000004 \to 1000008 \to 100016 \to 10013 \to 1007 \to 114 \to 19.$$

Значит, $10^{99} + 1$ и есть наименьшее хорошее стозначное число.
Ответ: $10^{99} + 1$.

4. В остроугольном треугольнике ABC проведена высота AA_1. H — точка пересечения высот треугольника ABC. Известно, что $AH = 3$, $A_1H = 2$, а радиус описанной около треугольника ABC окружности равен 4. Найдите расстояние от центра этой окружности до H.

Решение. Проведем в треугольнике высоты BB_1 и CC_1. Тогда четырехугольник AC_1HB_1 вписанный, поскольку его противоположные углы C_1 и B_1 прямые. Значит: $\angle BHC = \angle C_1HB_1 = 180^\circ - \angle C_1AB_1$. Отразим точку H симметрично относительно прямой BC и обозначим получившуюся точку через H_1. Тогда $\angle BH_1C = \angle BHC = 180^\circ - \angle C_1AB_1$, стало быть, четырехугольник $BACH_1$ вписанный и точка H_1 лежит на окружности, описанной около треугольника ABC. Обозначим центр этой окружности через O.

По построению имеем $H_1A_1 = HA_1 = 2$, следовательно, в равнобедренном треугольнике OAH_1 основание AH_1 равно $3+2+2=7$, а боковая сторона равна радиусу окружности: то есть 4. Высота, опущенная на основание, равна

$$\sqrt{4^2-(7/2)^2} = \sqrt{15}/2,$$

а расстояние от основания O_1 этой высоты до H равно $AH_1/2 - AH = 7/2 - 3 = 1/2$. Следовательно,

$$OH = \sqrt{OO_1^2 + O_1H^2} = \sqrt{(\sqrt{15}/2)^2 + (1/2)^2} = 2.$$

Ответ: 2.

5. Пусть x — такое число из интервала $(\pi/2, \pi)$, что

$$\frac{4}{3}\left(\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}\right) = 1.$$

Докажите, что число

$$\left(\frac{4}{3}\right)^4 \left(\frac{1}{\sin^4 x} + \frac{1}{\cos^4 x}\right)$$

целое и найдите его.

Решение. Для краткости, введем обозначения $s = \sin x$, $c = \cos x$. Найдем число $t = 1/cs$. Для этого возведем соотношение $(s^{-1}+c^{-1}) = 3/4$ в квадрат. Получим $s^2+c^2+2cs = 9(cs)^2/16$. Учитывая, что $s^2+c^2=1$, получаем такое квадратное уравнение на t:

$$t^2 + 2t - 9/16 = 0.$$

Это уравнение имеет два решения $1/4$ и $-9/4$. Поскольку cs должно быть отрицательно, получаем $t = -9/4$.

Рассмотрим последовательность $A_n = (4/3)^n(s^{-n}+c^{-n})$. Выведем рекуррентное соотношение для чисел A_n.

$$A_n = \frac{4^{n+1}}{3^{n+1}}\left(s^{-1}+c^{-1}\right)\left(s^{-n}+c^{-n}\right) =$$

$$= A_{n+1} + \frac{4^2}{3^2cs}A_{n-1} = A_{n+1} - 4A_{n-1}.$$

Таким образом, $A_{n+1} = A_n + 4A_{n-1}$ Пользуясь тем, что $A_0 = 2$, $A_1 = 1$, находим последующие A_n из рекуррентного соотношения:

$$A_2 = 9,\ A_3 = 13,\ A_4 = 49.$$

Ответ: 49.

6. Через центр сферы радиуса $\sqrt{2}$ проведены 6 прямых, параллельных ребрам некоторого правильного тетраэдра. Точки пересечения этих прямых со сферой являются вершинами выпуклого многогранника. Вычислите объем и площадь поверхности этого многогранника.

Решение. Обозначим начальный тетраэдр через T. У тетраэдра T 6 ребер, поэтому 6 прямых пересекают сферу в 12 точках. Следовательно, у нашего многогранника, который мы обозначим через M, 12 вершин. Поскольку все прямые проходят через центр сферы, многогранник M центально симметричен относительно центра сферы O.

Рассмотрим три прямые, параллельные трем ребрам тетраэдра T, проходящим через фиксированную вершину A тетраэдра T. Выберем на каждой из них направление, соответствующее продолжению соответствующего ребра тетраэдра за вершину A и рассмотрим три луча, выходящие из центра сферы в указанных направлениях. Эти лучи попарно составляют друг с другом угол $60°$, поэтому три точки их пересечения со сферой вместе с центром сферы являются вершинами правильного тетраэдра, сторона которого равна радиусу сферы. Грань этого тетраэдра, образованная тремя лежащими на сфере вершинами, является, очевидно, гранью нашего многогранника.

При рассмотрении трех лучей, дополнительных к описанным выше, мы получим еще один тетраэдр, центрально-симметричный только что описанному, и, соответственно, еще одну треугольную грань нашего многогранника.

Проделывая то же самое с каждой вершиной тетраэдра T, мы получим в результате 8 правильных тетраэдов, содержащихся в нашем многограннике, и, соответственно, 8 его граней, являющихся правильными треугольниками. Объем каждого такого тетраэдра равен, как нетрудно посчитать, $1/3$, а площадь одной грани, соответственно, $\sqrt{3}/2$. Следовательно, вклад найденных тетраэдров в объем многогранника равен $8/3$, а в площадь поверхности, соответственно, $4\sqrt{3}$.

Зафиксируем теперь какое-нибудь ребро a тетраэдра T. Рассмотрим теперь четыре проходящих через центр сферы луча, параллельных четырем ребрам тетраэдра, смежным с ребром a. (Как и в первом рассмотрении, выберем на каждом из них направление, соответствующее продолжению соответствующего ребра тетраэдра за вершину, принадлежащую ребру a.) Очевидно, эти четыре луча пересекают сферу в четырех точках, образующих вместе с центром сферы правильную четырехугольную пирамиду, основание которой является гранью нашего многогранника. Как нетрудно подсчитать, площадь основания равна 2, а объем пирамиды, соответственно, $2/3$.

Количество таких четырехугольных пирамид равно числу ребер, т.е. 6, поэтому вклад их в объем равен 4, а вклад в площадь поверхности, соответственно, 12.

Осталось убедиться в том, что эти 8 тетраэдров и 6 четырехугольных пирамид исчерпывают наш многогранник. (Очевидно, что все эти 14 пирамид попарно пересекаются только по границе.) Это проще всего сделать, нарисовав его эскиз. Заметим сначала, что три прямые, параллельные трем ребрам основания начального тетраэдра, лежат в одной плоскости α, которая рассекает наш многогранник по правильному шестиугольнику, вписанному в окружность большого круга, по которой плоскость α рассекает сферу. Этот шестиугольник делит наш многогранник на две центрально-симметричные части, поэтому достаточно нарисовать эскиз одной из двух половин. На верхней полусфере имеется еще только три вершины многогранника, образующие треугольную грань b, полученную описанной выше конструкцией. Легко видеть, что грань b параллельна плоскости сечения α, и над плоскостью α находятся еще ровно три такие грани, каждая из которых образована одной вершиной грани b и двумя ближайшими к ней смежными вершинами шестиугольника. Остальные три грани, образованные одной стороной треугольной грани b и одной параллельной ей стороной шестиугольника — квадраты, являющиеся основаниями описанных выше четырехугольных пирамид.

Следовательно, мы исчерпали весь многогранник M, так что его объем равен $12 + 4\sqrt{3}$, а площадь поверхности $4 + 8/3 = 12/3$.
Ответ: Объем равен $12 + 4\sqrt{3}$, площадь поверхности равна $4 + 8/3 = 12/3$.