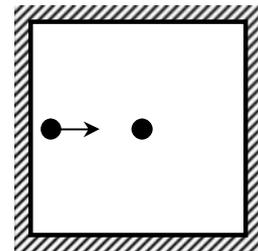
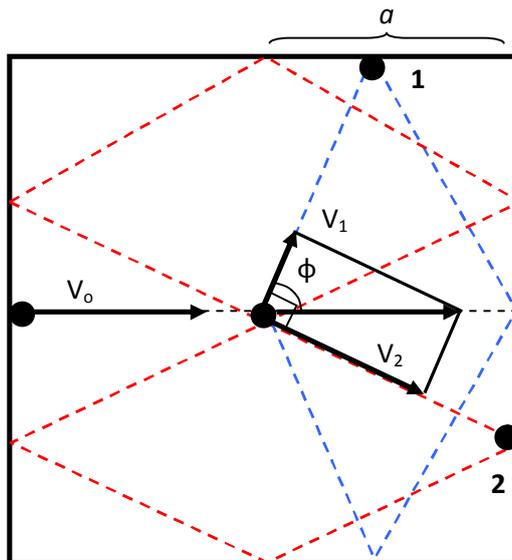


11 класс

1. В центре квадратного бильярдного стола со стороной 2 м находится шар. От борта, по кратчайшему расстоянию к нему, движется со скоростью 1 м/с такой же шар. После соударения он отклоняется на угол $\phi = \arctg 2$ от первоначальной траектории. Найти время до их следующего соударения. Все удары абсолютно упругие. Трением пренебречь.



Решение



Поскольку из закона сохранения импульса и энергии выражение $p_0^2 = p_1^2 + p_2^2 + 2p_1 \cdot p_2 \cdot \cos \Theta$ равно $p_0^2 = p_1^2 + p_2^2$ только при $\cos 90^\circ = 0$.

Угол разлета шаров 90° .

Поскольку $\alpha = \arctg 2$, шар попадает в точку $\frac{a}{2}$ от вершины.

$$V_0^2 = V_1^2 + V_2^2.$$

Из тригонометрии следует, что $|V_1| = \frac{|V_2|}{2}$.

$$V_1 = V_0 \cdot \cos \alpha.$$

Соударение произойдет в центре стола после 8 проходов шаром 2 и 4 проходов шаром 1, поскольку $V_2 = 2V_1$. Подставим значение угла α , получим время

$$t = \frac{S_{\text{общ}}}{V_1} = \frac{4a}{V_0 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha} = \frac{4 \cdot 1}{V_0 \cdot 0,4} = 10 \text{ с.}$$

Или, сделав следующие преобразования:

$$\frac{\sin^2 \alpha}{4} = 1 - \sin^2 \alpha; 5 \sin \alpha = 4; \sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}; \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}};$$

получим аналогичный результат $t = \frac{4a}{V_0 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}} = 10 \text{ с.}$

Ответ: 10 с.

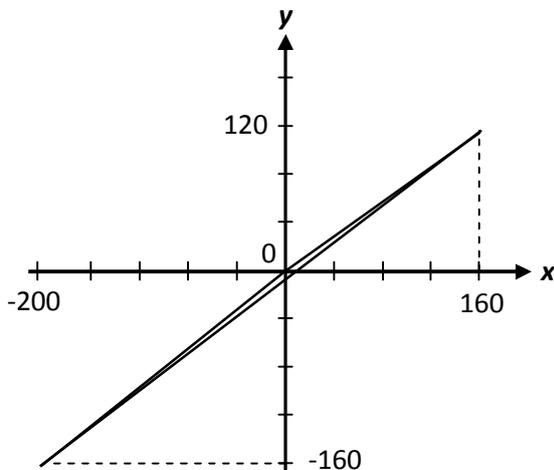
2. Вдоль шоссе для создания лесополосы выделен участок, координаты которого в декартовой системе удовлетворяют системе неравенств:

$$\begin{cases} 3x \geq 4y, \\ 4x \geq 5y, \\ 7x - 9y \leq 40. \end{cases}$$

В каждой точке (x, y) с целыми координатами этого участка предполагается посадить дерево. Определите количество деревьев, которое потребуется для этого.

Решение

Если на координатной плоскости изобразить множество точек, координаты которых удовлетворяют исходной системе, то получим треугольник с вершинами $O(0; 0)$, $A(-200; -160)$, $B(160; 120)$.



Таким образом, становится очевидным, что решить задачу непосредственным подсчетом числа точек с целыми координатами, попавшими в область, практически невозможно. Выберем другой путь.

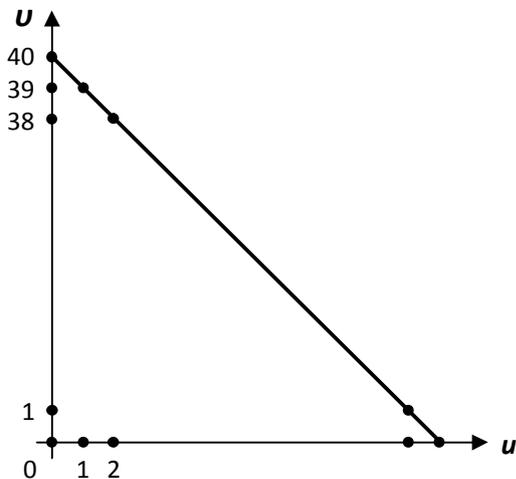
Введем новые переменные u и v , положив
$$\begin{cases} u = 3x - 4y, \\ v = 4x - 5y. \end{cases}$$

Решив эту систему относительно x и y , получаем
$$\begin{cases} x = 4v - 5u, \\ y = 3v - 4u. \end{cases}$$

Заметим, что при указанных преобразованиях каждой паре целых чисел (x, y) соответствует пара целых чисел (u, v) и наоборот, каждой паре целых чисел (u, v) отвечает пара целых чисел (x, y) . В новых координатах u, v система неравенств принимает вид:

$$\begin{cases} u \geq 0, \\ v \geq 0, \\ u + v \leq 40. \end{cases}$$

Для решения задачи достаточно найти количество пар целых чисел (u, v) , удовлетворяющих последней системе. Легко видеть, что эта система в плоскости Ouv определяет треугольник, изображенный на рисунке:



Количество точек с целыми координатами, лежащими внутри, а также на границе треугольника, найдем, используя формулу для суммы n членов арифметической прогрессии. В результате получим:

$$S = 1 + 2 + \dots + 40 + 41 = \frac{1 + 41}{2} \cdot 41 = 861.$$

Ответ: 861.

3. Температура внутри холодильной камеры, работающей по идеальному циклу, поддерживается постоянно (-23°C). Через ее стенки каждый час проникает внутрь 10 кДж тепла. Какое количество энергии потребляет холодильник за сутки? Температура в комнате 27°C .

Решение

Коэффициент полезного действия машины, работающей по идеальному циклу:

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}; \quad \eta = \frac{A}{Q_2}; \quad Q_2 - \text{количество теплоты, отбираемое у холодильной камеры.}$$

$$\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2 \cdot \eta}{A};$$

$$A = \frac{Q_2(T_1 - T_2)}{T_1 \left(1 - \frac{T_1 - T_2}{T_1}\right)} = \frac{Q_2(T_1 - T_2)}{T_2} = Q_2 \left(\frac{T_1}{T_2} - 1\right) = 10^4 \cdot \left(\frac{320}{250} - 1\right) = 0,2 \cdot 10^4 \text{ Дж за час.}$$

За сутки $Q_{\text{общ}} = 24 \cdot 0,2 \cdot 10^4 = 4,8 \cdot 10^4 \text{ Дж.}$

Ответ: 48 кДж.

4. В трех сосудах объемами 1 л, 2 л и 3 л находятся газы: водород, азот и воздух под давлениями 1 атм, 2 атм и 3 атм соответственно. Эти сосуды соединяют между собой трубками, объемами которых можно пренебречь. Найти установившееся давление.

Решение

Уравнение состояния газов до соединения имеет вид:

$$P_i \cdot V_i = \nu_i \cdot R \cdot T, \text{ где } i = 1, 2, 3.$$

После соединения: $P_{\text{об}}(V_1 + V_2 + V_3) = (\nu_1 + \nu_2 + \nu_3) \cdot R \cdot T.$

Решая относительно $P_{\text{об}}$, имеем:

$$P_{\text{об}} = \frac{P_1 \cdot V_1 + P_2 \cdot V_2 + P_3 \cdot V_3}{V_1 + V_2 + V_3} = \frac{1 + 4 + 9}{6} = 2\frac{1}{3} \approx 2,33 \text{ Па.}$$

Ответ: 2,33 Па.

5. Определить разность потенциалов между точками А и В в тот момент, когда на участке цепи протекает ток 1 А. Скорость изменения тока 4 А/с. Сопротивление 2 Ом, индуктивность катушки 0,2 Гн.



Решение

Воспользуемся уравнением закона Ома для участка неоднородной цепи:

$$I \cdot R = \Delta\varphi + \varepsilon = \Delta\varphi - L \frac{\Delta I}{\Delta t}, \text{ поскольку скорость изменения тока со знаком «+»,}$$

т.е. ток нарастает, имеем $\varepsilon = -L \frac{\Delta I}{\Delta t}.$

РЕШЕНИЕ ЗАДАНИЙ ВОЛГОГРАДСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ «ПОЛИТЕХНИК»
Заключительный этап

Найдем $\Delta\varphi$:

$$\Delta\varphi = I \cdot R + L \frac{\Delta I}{\Delta t} = 1 \cdot 2 + 0,2 \cdot 4 = 2,8 \text{ В.}$$

Ответ: 2,8 В.

6. Вследствие радиоактивного распада уран ${}_{92}\text{U}^{238}$ превращается в свинец ${}_{82}\text{Pb}^{206}$.
Сколько α и β -превращений он при этом испытывает?

Решение

При k α -превращений и l β -превращений массовое число уменьшится в $4k$, а зарядовое число $(2k - l)$.

$$32 = 4k;$$

$$10 = 2k - l;$$

для α -превращений: $k = 8$;

для β -превращений: $l = 6$.

Ответ: 8 и 6.