16.1

11 класс

M1

Ответ: 9 м/с и 8 м/с.

Решение: Пусть скорости велосипедистов равны *x* м/с и *y* м/с ($x > y$). Тогда $10(x+y)=170$ и $170(x-y)=170$. Отсюда находим *x* = 9 м/с и *y* = 8 м/с

M2

Ответ: Например: 11…10 (сто единиц).

M3

Ответ: 134.

Решение: Искомыми являются числа с цифрами $a, a+1, a+2, b$, а также с цифрами $c, d, d+1, d+2$, где a от 1 до 7, b – от 0 до 9, c – от 1 до 9, d – от 0 до 7. Для чисел первого типа получаем $7 \cdot 10 = 70$ вариантов, для чисел второго типа – $9 \cdot 8 = 72$ варианта.

При этом мы дважды посчитали числа, которые принадлежат и первому и второму типу. Это числа вида f, $f+1$, $f+2$, $f+3$, где f от 1 до 6. Таких чисел 6.

Поэтому искомое количество есть $70+72-6=134$.

M4

Ответ. $f(-1) = 7$

17.1

Решение. Обозначим $t = x + \frac{1}{x}$, тогда $t^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}$, т.е. $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$, при этом. $g(t) = 3t^2 + 2t - 1 = (t+1)(3t-1)$. Парабола с вершиной в точке $t_0 = -\frac{1}{3}$. Наименьшее значение $\min g(t) = \min(g(-2), g(2)) = g(-2) = 7$. Но при $t = x + \frac{1}{x} = -2 \to x = -1$. Т.е. наименьшее значение функции $f(x)$ принимается при $x = -1$, и $f(-1) = 7$.

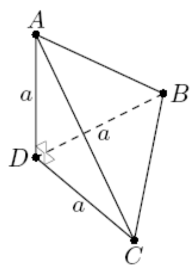
М5

Ответ: Не может.

Решение: Рассмотрим шахматную раскраску нашей доски в два цвета – чёрный и белый. Тогда клеток чёрного и белого цвета будет одинаковое количество. Заметим, что в каждом прямоугольнике 2×1 будет по одной чёрной и белой клетке. Это означает, что суммарно во всех лесенках количество клеток чёрного и белого цвета должно быть одинаковым. Но в каждой лесенке будет либо 4 белых и 2 чёрных клетки, либо 4 чёрных и 2 белых клетки. Пусть количество лесенок первого вида x, а второго вида y. Тогда суммарное количество белых клеток в лесенках равно $4x+2y$, а чёрных – $2x+4y$. Отсюда $4x+2y=2x+4y$, то есть $x=y$. Это означает, что общее количество лесенок $2x$ чётно, и поэтому не может равняться 333.

М6

Ответ. Три.



Решение. Докажем вначале, что все четыре высоты пирамиды не могут быть длинными. Предположим противное. Пусть AH и DP – высоты пирамиды $ABCD$, а AM, DN – высоты треугольников ABC и DBC соответственно (см. рис.). По условию имеем $AH \ge DN$ и $DP \ge AM$. Но перпендикуляр AH не длиннее наклонной AM к той же плоскости BCD; аналогично $DP \le DN$. Итак, получаем $AM \ge AH \ge DN \ge DP \ge AM$. Значит, все эти неравенства должны обратиться в равенства, что возможно только если отрезки AH и AM совпадают. Тогда плоскость CAB содержит перпендикуляр AM к плоскости BCD, то есть $CAB \perp BCD$. Аналогично, $DAC \perp BCD$. Значит, и линия пересечения плоскостей DAC и CAB – прямая AC – перпендикулярна плоскости BCD. Аналогично, $BA \perp BCD$; но тогда $AC \perp AB$, что невозможно. Значит, длинных высот не больше трёх.

Осталось показать, что существует пирамида $ABCD$, имеющая ровно три длинных высоты. Это пирамида, плоские углы при вершине D которой – прямые, а длины ребер, выходящих из этой вершины, одинаковы и равны a (см. рис.). У такой пирамиды высоты из вершин A, B, C имеют длину a, а длины высот треугольников граней, к которым эти высоты проведены, равны a или $a/\sqrt{2}$.