1.3 Задания 2 отборочного этапа олимпиады

1.3.1 Задания для 11 класса

(приведен один из вариантов заданий)

Задача 1. (2 балла)

$\cos^2 x + \sin^2 y = 1,47$. Найдите $\cos 2y - \cos 2x$.

Задача 2. (2 балла)

Простые числа p и q таковы, что $p+3 = 2q$. Какое наибольшее значение может принимать остаток от деления числа $(p-q)^{3q}$ на q?

Задача 3. (3 балла)

Дана трапеция $ABCD$ с большим основанием $BC = 36$. Продолжения сторон AB и CD пересекаются в точке K, причём $BK = 42$. Диаметр вписанной окружности трапеции в 2 раза меньше высоты KH треугольника KBC. Найдите расстояние между точками касания вписанных окружностей трапеции и треугольника KAD с прямой AD.

Задача 4. (3 балла)

На плоскости даны 21 попарно различных векторов с целыми неотрицательными координатами. Для каждой пары различных векторов посчитали их скалярное произведение. Какое наименьшее значение может принимать сумма этих скалярных произведений?

Задача 5. (3 балла)

Найдите площадь множества точек в первой координатной четверти, удовлетворяющих неравенствам $y \leqslant x \leqslant 42$ и $\{y\} \leqslant \{x\}[x+1]$.

Квадратные скобки означают целую часть числа, фигурные — дробную.

Задача 6. (3 балла)

Три бесконечных цилиндра радиусов 4, 4 и 7 попарно касаются. Оси цилиндров попарно перепндикулярны. Найдите площадь треугольника, образованнного точками касания цилиндров.

Задача 7. (3 балла)

В клубе состоит некоторое количество джентльменов, у каждого из которых меньше 6 друзей. Каждый из них послал открытки всем своим друзьям и друзьям друзей (не больше одной открытки каждому). Всего было послано 20000 открыток. Какое наименьшее число джентльменов может быть в клубе?

Задача 8. (3 балла)

1. Дан куб $8 \times 8 \times 8$, состоящий из единичных кубиков (ячеек). Белочка, изначально находилась в юго-западной нижней ячейке. За один прыжок она перемещалась из текущей ячейки в соседнюю, то есть имеющую с ней общую грань. В итоге она побывала в каждой из 512 ячеек по одному разу и оказалась в северо-восточной верхней ячейке, сделав 17 прыжков на восток и 15 прыжков на север. Сколько прыжков белочка сделала вверх?

Задача 9. (4 балла)

Последовательность x_n задана условиями $x_0 = 2$, $x_n = a_n + \dfrac{1}{x_{n-1}}$ где a_n — какие-то натуральные числа от 2 до 48 включительно. Какое наименьшее значение может принимать число $12 \cdot (x_{99} - 1)^2$? Ответ округлите до ближайшего целого.

Задача 10. (5 баллов)

Дан многочлен пятой степени $P(x)$ старшим коэффициентом 2 такой, что $P(2) = 5$, $P(3) = -2$ $P(4) = \quad 5$, $P'(2) = \quad 21$, $P'(3) = -2$, $P'(4) = 7$. Найдите коэффициент многочлена при x^4.