1.2 Задания 1 отборочного этапа олимпиады

1.2.1 Задания для 11 класса

(приведен один из вариантов заданий)

Задача 1. (2 балла)

Последовательность $\{x_n\}$ задана условиями $x_1 = 1$ и $x_{n+1} = \dfrac{1}{x_n} + \dfrac{1}{n}$. Найдите x_{1000}. Ответ запишите в виде несократимой правильной или неправильной дроби, не округляйте.

Задача 2. (2 балла)

Девять футбольных команд сыграли турнир в один круг на нейтральном поле (каждые две команды сыграли между собой один раз). Все матчи закончились с разным счётом (результаты 0:1 и 1:0 считаются одинаковыми). Какое наименьшее количество голов могло быть забито во всём турнире?

Задача 3. (3 балла)

В клубе состоят 11 джентльменов, некоторые из них знакомы между собой. Оказалось, что любую четвёрку джентльменов можно разбить на две пары так, чтобы в каждой паре джентльмены были знакомы между собой. Найдите наименьшее возможное количество пар знакомых в этом клубе.

Задача 4. (3 балла)

Положительные вещественные числа x и y таковы, что $[x]\{x\}[y]\{y\} = 17$. Какое наименьшее целое значение может принимать число $x + y$?

Как обычно, $[x]$ означает целую часть числа x, а $\{x\}$ — дробную.

Задача 5. (3 балла)

Куб $10 \times 10 \times 10$ разбит на тысячу единичных кубиков, которые мы будем называть ячейками. В ячейках стоят целые числа, в одной из ячеек стоит число 1. Числа в соседних ячейках (то есть ячейках, имеющих общую грань) отличаются на 1. Какое наибольшее значение может принимать сумма чисел во всём кубе?

Задача 6. (3 балла)

В четырёхугольнике $ABCD$ прождолжения сторон BC и AD пересекаются в точке M, а диагонали в точке K. Оказалось, что $\angle ACB + \angle ADB = 180°$, $AM : BM = 7 : 9$, $AC : BD = 9 : 8$ и $AD : BC = 7 : 10$. Найдите отношение $AK : BK$.

Задача 7. (3 балла)

Непрерывная и непрерывно дифференциируемая функция $f(x)$ такова, что $f(0) = f'(0) = 0$. Её график повернули на $10°$ против часовой стрелки, после чего получился график какой-то другой функции. Какое наибольшее целое значение может принимать функция $f'(x)$?

Задача 8. (3 балла)

В жёлобе, имеющем форму двугранного прямого угла, лежат три сферы радиусами 4, 6 и 9 именно в таком порядке, причём вторая сфера касается двух оставшихся. Найдите расстояние между центрами первой и третьей сфер.

Задача 9. (4 балла)

Вещественные числа a, b и c таковы, что $\log_a b + \log_b c + \log_c a = 10$. Какое наибольшее целое значение может принимать сумма $\log_a c + \log_b a + \log_c b$?

Задача 10. (5 баллов)

Числа p и q — простые. Степени числа q при делении на p дают ровно три различных остатка. Степени числа p при делении на q также дают ровно три различных остатка. В ответе укажите наименьшее возможное значение числа p и соответстующее ему число q.