1 Открытая олимпиада школьников 2021/2022 уч. год

1.1 Задания с решениями заключительного этапа олимпиады

1.1.1 Задания для 11 класса

(приведен один из вариантов заданий)

Задача 1. (2 балла)

Многочлен $P(x)$ таков, что $P(x^2)$ имеет $2n+1$ корней. Какое наменьшее количество корней может иметь производная многочлена $P(x)$?

(В обоих случаях имеются в виду различные корни, без учёта кратности).

Задача 2. (2 балла)

Вася придумал новую операцию на множестве положительных чисел: $a \star b = a^{\ln b}$. Найдите логарифм числа $\dfrac{(ab) \star (ab)}{(a \star a)(b \star b)}$ по основанию $a \star b$.

Задача 3. (3 балла)

4^{27000} 82 делится на 3^n. Какое наибольшее натуральное значение может принимать n?

Задача 4. (3 балла)

Окружности O_1 радиуса b и O_2 радиуса c касаются в точке O — центре окружности O_3 радиуса a. Точка A — одна из точек пересечения окружностей O_1 и O_3. Окружность O_4 касается окружности O_1 в точке A и окружности O_2 в точке B. Точка C — такая точка на прямой OB, что треугольники OAB и OCA подобны. Найдите AC.

Все указанные в условии касания происходят внешним образом.

Задача 5. (3 балла)

Положительные числа x, y и z таковы, что $x + y + z = 5$. Какое наименьшее значение может принимать величина $x^2 + y^2 + 2z^2 - x^2y^2z$?

Задача 6. (3 балла)

Дана четырёхугольная пирамида $OABCD$, в основании которой лежит параллелограмм $ABCD$. Плоскость α пересекает ребра OA, OB, OC и OD пирамиды в точках A', B', C' и D' соответственно. Известно, что $\dfrac{OA'}{OA} = \dfrac{1}{a}$, $\dfrac{OB'}{OB} = \dfrac{1}{b}$, $\dfrac{OC'}{OC} = \dfrac{1}{c}$. Найдите $\dfrac{V_{OABCD}}{V_{OA'B'C'D'}}$.

Задача 7. (4 балла)

Дан правильный n-угольник, в котором проведены все диагонали. Докажите, что они образуют не больше

$\dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24} - \dfrac{n}{4} \cdot \left(\dfrac{n}{2} - 1\right) + 1 - \dfrac{n}{2} \cdot \left(\dfrac{n}{2} - 1\right) \cdot \left(\dfrac{n}{2} - 3\right)$ точек пересечения (не считая вершин).

Число n во всех вариантах задачи представляется в виде $n = 4k + 2$, где k натуральное число.

Задача 8. (5 баллов)

В таблице 8×8 какие-то 23 клетки чёрные, а остальные — белые. В каждой белой клетке написали суммарное количество чёрных, находящихся с ней на одной горизонтали и находящихся с ней на одной вертикали; в чёрных клетках ничего не написано. Какое наибольшее значение может принимать сумма чисел во всей таблице?