

1.3.2 Задания для 10 класса

(приведен один из вариантов заданий)

Задача 1. (2 балла)

Функция $f(x)$, определённая на всей вещественной оси, такова, что $f(3x) = 3f(x + 1)$ и $f(2) = 1$. Найдите $f(1095)$.

Задача 2. (2 балла)

$\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ — целочисленные возрастающие арифметические прогрессии, такие что $a_1 + a_2 + \dots + a_7 = b_1 + b_2 + \dots + b_5 = 350$. Какое наименьшее значение может принимать число $b_5 - a_1$?

Задача 3. (3 балла)

В Таинственной Стране 8 городов. Некоторые города соединены двусторонними авиалиниями. Оказалось, что есть два города, между которыми нельзя добраться ни напрямую, ни с одной пересадкой. Какое наибольшее число авиалиний может быть в стране?

Задача 4. (3 балла)

Окружности с центрами в точках A и B и радиусами 10 и 9 пересекаются в точках C и D . CE диаметр первой окружности, F — точка на прямой CD такая, что FE и FG — касательные к первой и второй окружностям соответственно. $AB = 8 + \text{Math.sqrt}(45)$. Найдите площадь треугольника FBG .

Задача 5. (3 балла)

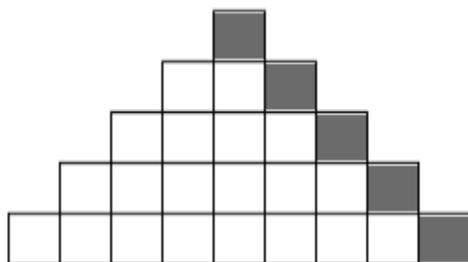
$P(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами, $P(1) = 2$, $P(2) = 1$. Какое наименьшее положительное значение может принимать $P(6)$?

Задача 6. (3 балла)

Сколько решений в натуральных числах имеет уравнение $a^2 - b^2 - a - b = 6000$?

Задача 7. (3 балла)

Фишка находится в левой нижней клетке клетчатой фигуры, изображённой на рисунке. Сколькими способами она может добраться до закрашенной диагонали, двигаясь только вправо или вверх?



Задача 8. (3 балла)

Приведённый квадратный трёхчлен $f(x)$ имеет единственный корень 1. Приведённый квадратный трёхчлен $g(x)$ имеет единственный корень 7. Приведённый квадратный трёхчлен $h(x)$ также имеет единственный корень. Какое наименьшее значение может принимать трёхчлен $f(x) + g(x) + h(x)$?

Задача 9. (3 балла)

На декартовой плоскости нарисован квадрат 13×13 с вершинами в целых точках (не обязательно по клеточкам). Сколько целых точек может быть внутри (не включая точки на границе) этого квадрата? Если возможных ответов несколько, перечислите все варианты через запятую.

Задача 10. (5 баллов)

Окружности O_1 и O_2 с радиусами 8 и 10 касаются в точке A . Обе они находятся внутри окружности O_3 и касаются её в точках B и C соответственно. Прямая AC вторично пересекает окружность O_3 в точке D , а окружность O_1 — в точке E . Наконец прямая AB вторично пересекает окружность O_3 в точке F . При этом $AB \approx 14,46203052$, $AC \approx 17,21325932$.

Найдите длину отрезка DE .