1.1.3 Задания для 9 класса

(приведен один из вариантов заданий)

Задача 1. (2 балла)

Графики квадратных трёхчленов $f(x)$ и $g(x)$ пересекаются в точке $(3;8)$. Трёхчлен $f(x)+g(x)$ имеет единственный корень 5. Найдите старший коэффициент трёхчлена $f(x)+g(x)$.

Ответ: 4

Решение:

Так как трёхчлен $f(x)+g(x)$ имеет единственный корень 5, его можно представить как $a(x-5)^2$, где a — это как раз и есть искомый старший коэффициент. Кроме того, значение этого трёхчлена в точке 3 равно сумме значений трёхчленов $f(x)$ и $g(x)$, то есть 16.

Значит, $a\cdot(-2)^2=16$, откуда $a=4$.

Задача 2. (2 балла)

Натуральное число n при делении на 12 даёт остаток a и неполное частное b, а при делении на 10, наоборот, остаток b и неполное частное a. Найдите n.

Ответ: 119

Решение:

Из условия следует, что $n=12b+a=10a+b$, откуда $11b=9a$. Значит, b делится на 9, а a делится на 11. С другой стороны, a и b это остатки от деления на 12 и 10 соответственно, поэтому $0\leqslant a\leqslant 11$ и $0\leqslant b\leqslant 9$. Получаем два варианта: $a=b=0$ и $n=0$ (что не подходит, т.к. n натуральное) или $a=11$, $b=9$, $n=119$.

Задача 3. (3 балла)

Известно, что $a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b+3abc=30$ и $a^2+b^2+c^2=13$.

Найдите $a+b+c$.

Ответ: 5

Решение:

$(a+b+c)^3-(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)=2(a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b+3abc)$. Обозначим $a+b+c$ за x, подставим известные значения выражений из условия и получим уравнение $x^3-13x-60=0$.

Нетрудно заметить, что число 5 является корнем этого уравнения. Разделив $x^3 - 13x - 60$ на $x - 5$, получаем $x^2 + 5x + 12$. У этого трёхчлена нет корней, значит, 5 — единственный возможный ответ.

Задача 4. (3 балла)

Окружности O_1 и O_2 касаются окружности O_3 радиуса 13 в точках A и B соотвественно и проходят через её центр O. Вторично эти окружности пересекаются в точке C. Известно, что $OC = 12$. Найдите AB.

Ответ: 10

Решение:

Поскольку окружности O_1 и O_2 касаются окружности O_3 в точках A и B соотвественно и проходят через её центр O, AO и BO являются их диаметрами. Значит, углы $\angle OCA$ и $\angle OCB$ прямые. Это не может быть один и тот же угол, поскольку тогда окружности O_1 и O_2 совпадают, значит, это смежные углы. Прямоугольные реугольники OCA и OCB равны по катету OC и гипотенузам. Значит, $AB = 2AC = 2\sqrt{OA^2 - OC^2} = 2\sqrt{13^2 - 12^2} = 10$.

Задача 5. (3 балла)

В трапеции $ABCD$ диагональ BD является биссектрисой угла $\angle B$, а её длина равна длине основания BC. Биссектриса угла $\angle CBD$ пересекает прямую AD в точке K. Точка L на продолжении отрезка BD за точку D такова, что $AB = DL$.

Докажите, что $AK = BL$.

Доказательство:

$\angle BKD = \angle CBK$ как накрест лежащие, а $\angle CBK = \angle KBD$, поскольку BK — биссектриса. Поэтому треугольник BKD равнобедренный, то есть $BD = DK$.

$\angle BDA = \angle CBD$ как накрест лежащие, а $\angle CBD = \angle ABD$, поскольку BD — биссектриса. Поэтому треугольник BDA равнобедренный, то есть $AB = AD$. Значит $DL = AD$, и, соответственно, $AK = AD + DK = DL + BD = BL$, что и требовалось доказать.

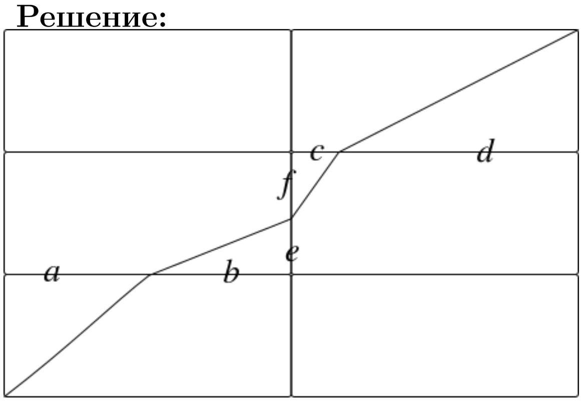
Задача 6. (4 балла)

Шесть положительных чисел, не превосходящих 3, удовлетворяют равенствам $a + b + c + d = 6$ и $e + f = 2$. Какое наименьшее значение может принимать выражение

$$\left(\sqrt{a^2+4} + \sqrt{b^2+e^2} + \sqrt{c^2+f^2} + \sqrt{d^2+4}\right)^2$$

Ответ: 72

Решение:



На рисунке изображены три прямоугольника $2 \times (a + b)$ и три прямоугольника $2 \times (c + d)$, образующие квадрат 6×6, поскольку $a + b + c + d = 6$. Отрезок длины 2 в центре рисунка разбивается на отрезки e и f в сумме дающие 2, как и должно быть по условию.

Тогда изображённая на рисунке ломаная, идущая из одного угла квадрата в другой, по теореме Пифагора имеет квадрат длины как раз и равный выражению, минимум которого нужно найти. Такая ломаная может быть построена для каждой шестёрки чисел, поэтому нам достаточно найти длину кратчайшей ломаной, которая составляет диагональ квадрата. Квадрат её длины равен $2 \cdot 6^2 = 72$.

Задача 7. (4 балла)

В таблице 8×8 какие-то клетки чёрные, а остальные — белые. В каждой белой клетке написали суммарное количество чёрных, находящихся с ней на одной горизонтали или вертикали; в чёрных клетках ничего не написано. Какое наибольшее значение может принимать сумма чисел во всей таблице?

Ответ: 256

Решение:

Число в белой клетке состоит из двух слагаемых: “горизонтального” и “вертикального”. Рассмотрим отдельно сумму всех “горизонтальных” и отдельно сумму всех “вертикальных” слагаемых по всей таблице. Если мы максимизируем каждую из этих двух сумм по отдельности, общая сумма также будет наибольшей.

Рассмотрим сумму “горизонтальных” слагаемых. Если в строке находится x чёрных клеток и $8-x$ белых, то сумма горизонтальных слагаемых в этой строке составляет $x(8-x)$. Эта величина максимальна при $x = 4$ и равна 16. Значит, максимальная сумма “горизонтальных” слагаемых составляет $8 \cdot 16 = 128$, а всех чисел, соответственно, 256.

Это значение достигается, например, для шахматной раскраски — легко убедиться, что в каждой строке и каждом столбце действительно 4 чёрных клетки.

Задача 8. (5 баллов)

32 волейбольных команды участвуют в турнире по следующей схеме. В каждом туре все оставшиеся команды разбиваются на пары случайным образом; если команд нечётное число, одна из команд пропускает этот тур. В каждой паре одна из команд побеждает, а другая проигрывает, ничьих в волейболе не бывает. После трёх поражений команды выбывает из турнира. Когда выбыли все команды кроме одной, эта команда объявляется победителем и турнир заканчивается.

Какое наименьшее количество туров может продолжаться турнир?

Решение:

Чтобы из турнира вылетели все команды кроме одной, они должны потерпеть хотя бы 93 поражения, то есть должно быть сыграно хотя бы 93 матча.

Также заметим, что после каждого тура количество команд уменьшается максимум вдвое, потому что не больше половины команд терпит поражение. В частности, в последнем туре могли участвовать только 2 команды, и они сыграли один матч. В предпоследнем туре участвовали максимум 4 команды и сыграли максимум 2 матча. За тур до этого было сыграно максимум 4 матча, а ещё за тур до этого максимум 8. Итого в последних 4 турах было сыграно не больше 15 матчей.

Значит до этого было сыграно ещё хотя бы 78 матчей. В каждом из остальных туров было сыграно не больше 16 матчей, значит всего этих туров хотя бы 5. Итого получаем не меньше $4 + 5 = 9$ туров.

За 9 туров команды могли управиться. Действительно, в первых 4 турах команды могли разбиться на пары, после чего в каждой паре нанести друг другу по 2 поражения. После этого каждой команде осталось проиграть один раз и мы получаем обычную олимпийскую систему из 5 туров, в каждом из которых половина команд выбывает.

Ответ: 9