1.1.4 Задания для 8 класса

(приведен один из вариантов заданий)

Задача 1. (2 балла)

Квадратные уравнения $x^2 + px + q$ и $x^2 + ax + b$ имеют по одному корню. Среди чисел p, q, a, b есть 16, 64 и 1024. Каким может быть четвёртое число?

Если возможных ответов несколько, в систему введите больший из них, а в письменном решении укажите все.

Ответ: ± 8, ± 64, 262144

Решение:

Дискриминант уравнения $x^2 + px + q$ должен быть равен нулю, поэтому $p^2 = 4q$. Аналогично $a^2 = 4b$.

Значит, если p это 16, 64 или 1024, $q = \dfrac{p^2}{4}$, то есть 64, 1024 или $2^{18} = 262144$. Аналогично для a и b.

Если же q это 16, 64 или 1024, $p = \pm 2\sqrt{q}$, то есть ± 8, ± 16 или ± 64. Аналогично для a и b.

Значит, коэффициент 64 обязательно находитя в одном уравнении с 16 или 1024, а четвёртое число равно ± 8, ± 64 или 262144.

Задача 2. (3 балла)

Натуральные числа a и b таковы, что $2a + 3b = \text{НОК}(a, b)$. Какие значения может принимать число $\dfrac{\textbf{НОК}(a,b)}{a}$? Перечислите все возможные варианты в порядке возрастания или убывания через запятую. Если решений нет, напишите число 0.

Ответ: 0 (решений нет)

Решение:

Пусть $d = \text{НОД}(a, b)$. Тогда $a = xd$, $b = yd$, $\text{НОК}(a, b) = xyd$, где x и y взаимно просты. Получаем $2xd + 3yd = xyd$. Сокращаем на d и получаем $2x + 3y = xy$.

Правая часть этого равенства делится на x, значит, $2x + 3y$ делится на x, откуда $3y$ делится на x. Так как x и y взаимно просты, 3 должно делится на x. То есть $x = 3$ или $x = 1$. Аналогично 2 делится на y.

Если $x = 3$, уравнение принимает вид $6 + 3y = 3y$, что неверно. Если $x = 1$, получаем $2 + 3y = y$, откуда y отрицательно, что тоже невозможно.

Значит, решений нет.

Задача 3. (3 балла)

Число N представляется в виде суммы квадратов пяти подряд идущих натуральных чисел. Докажите, что $N - 5$ представляется в виде суммы квадратов двух натуральных чисел.

Доказательство:

Обозначим эти пять подряд идущих чисел за $x - 2$, $x - 1$, x, $x + 1$ и $x + 2$. Тогда их квадраты равны $x^2 - 4x + 4$, $x^2 - 2x + 1$, x^2, $x^2 + 2x + 1$, $x^2 + 4x + 4$. Отсюда $N = 5x^2 + 10$, а $N - 5 = 5x^2 + 5 = 4x^2 + 4x + 1 + x^2 - 4x + 4 = (2x + 1)^2 + (x - 2)^2$, что и требовалось доказать.

Задача 4. (3 балла)

Внутри пятиугольника отметили 1000 точек и разделили пятиугольник на треугольники так, чтобы каждая из отмеченных точек оказалась вершиной хотя бы одного из них. Какое наименьшее число треугольников могло получиться?

Ответ: 1003

Решение:

Сумма углов пятиугольника составляет $540°$. Сумма углов в каждой внутренней точке составляет либо $180°$, если она лежит на стороне одного из треугольников и является вершиной ещё нескольких, либо $360°$, если со всех сторон от неё находятся углы треугольников. То есть, в каждой внутренней точке сумма углов не менее $180°$.

Итого для тысячи точек получаем сумму углов всех треугольников не менее $540° + 1000 \cdot 180° = 1003 \cdot 180°$. Для этого нам необходимо хотя бы 1003 треугольника, т.к. в каждом сумма углов $180°$.

Пример, когда достигается значение 1003, строится следующим образом: сначала разделим пятиугольник на три треугольника диагоналями, выходящими из одной из вершин. Затем на одной из диагоналей отметим 1000 точек и соединим их с противоположной вершиной треугольника, для которого эта диагональ является стороной. Треугольник разобьётся на 1001 часть, что даст нам ещё 1000 новых треугольников.

Задача 5. (3 балла)

В трапеции $ABCD$ с основанием AD диагонали являются биссектрисами углов $\angle B$ и $\angle C = 110^\circ$. Найдите градусную меру угла $\angle BAC$.

Решение:

$\angle BDA = \angle CBD$ как накрест лежащие, а $\angle CBD = \angle ABD$, поскольку BD — биссектриса. Поэтому треугольник BDA равнобедренный, то есть $AB = AD$. Аналогично $CD = AD$, то есть наша трапеция равнобедренная (равнобокая) и $\angle B = \angle C = 110^\circ$.

$\angle BAC = 180^\circ - \angle B - \angle BCA = 180^\circ - 110^\circ - 55^\circ = 15^\circ$.

Ответ: 15

Задача 6. (3 балла)

В таблице 8×10 (8 строк, 10 столбцов) какие-то клетки чёрные, а остальные — белые. В каждой белой клетке написали суммарное количество чёрных, находящихся с ней в одной строке; в чёрных клетках ничего не написано. Какое наибольшее значение может принимать сумма чисел во всей таблице?

Ответ: 200

Решение:

Если в строке находится x чёрных клеток и $10 - x$ белых, то сумма горизонтальных слагаемых в этой строке составляет $x(10 - x)$. Эта величина максимальна при $x = 5$ и равна 25. Это можно понять, так как $x(10-x)-25 = -x^2+10x-25 = -(x-5)^2$. Значит, максимальная сумма всех чисел составляет $8 \cdot 25 = 200$. Пример легко строится.

Задача 7. (4 балла)

На плоскости отмечены 13 точек общего положения, некоторые из которых соединены отрезками. При этом проведённые отрезки не образуют ни одного треугольника или четырёхугольника с вершинами в отмеченных точках.

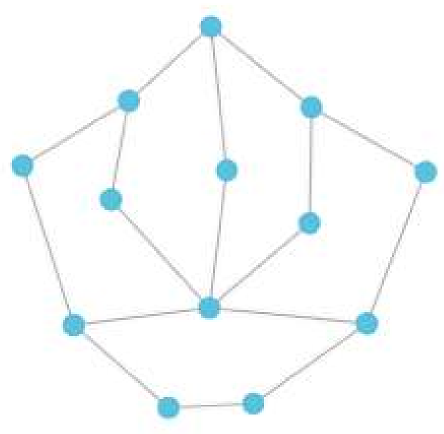
Может ли быть нарисовано больше 16 отрезков?

Точки общего положения — точки, никакие три из которых не лежат на одной прямой.

Ответ: Да

Решение:

Поскольку не должно быть ни треугольников, ни четырёхугольников, построим пример из пятиугольников:



На рисунке 17 отрезков. На самом деле можно было бы использовать ещё и самопересекающиеся четырёхзвенные ломаные, которые по определению четырёхугольниками не являются.

Задача 8. (5 баллов)

В треугольнике ABC $AB = 13$ и $BC = 15$. На стороне AC взята точка D такая, что $AD = 5$ и $CD = 9$. Биссектриса угла, смежного с углом A, пересекает прямую BD в точке E. Найдите DE.

Ответ: 7,5 || 15/2

Решение:

Посчитаем площадь треугольника ABC по формуле Герона: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c} = \sqrt{21 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} = 84$ (где p — полупериметр треугольника, a, b и c — его стороны). Тогда длина высоты BH, опущенной на сторону AC, равна $\dfrac{2S}{AC} = 12$, откуда по теореме Пифагора $AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = 5 = AD$. То есть D и H — это одна и та же точка, и BD — высота.

Пусть AK — биссектриса угла K в треугольнике ABD. Тогда, по основному свойству биссектрисы, $BK : KD = AB : AD = 13 : 5$, откуда $KD = \dfrac{5}{18} \cdot BD = \dfrac{10}{3}$.

Угол KAE, образованный биссектрисами смежных углов, прямой, значит, AD — высота в прямоугольном треугольнике KAE и $AD^2 = KD \cdot DE$, откуда $DE = 25 : \dfrac{10}{3} = 7,5$.