1.1.5 Задания для 5-7 классов

(приведен один из вариантов заданий)

Задача 1. (2 балла)

ABC — равносторонний треугольник со стороной 10. На стороне AB взята точка D, на стороне AC — точка E, на стороне BC — точки F и G такие, что треугольники ADE, BDG и CEF также равносторонние. $AD = 3$. Найдите FG.

Ответ: 4

Решение:

$BD = AB - AD = 10 - 3 = 7$, поэтому все стороны треугольника BDG равны 7.

$CE = AC - AE = AC - AD = 10 - 3 = 7$, поэтому все стороны треугольника CEF также равны 7.

Получается, что $BG + CF = 14$. Это больше длины отрезка $BC = 10$, поэтому $GF = 14 - 10 = 4$.

Задача 2. (3 балла)

Лиса Алиса загадала двузначное число, и сообщила Буратино, что это число делится на 2, 3, 4, 5 и 6. Однако Буратино узнал, что из этих пяти утверждений ровно два на самом деле неверны. Какие числа могла загадать лиса Алиса? В ответе укажите количество возможных вариантов.

Ответ: 8

Решение:

Если число не делится на 2, то оно не делится ни на 4, ни на 6 и мы получаем уже три неверных утверждения. Значит, загаданное число точно делится на 2. Если чётное число делится на 3, то оно делится и на 6 тоже, значит в этом случае неверны утверждения про делимость на 4 и 5. Если же число не делится на 3, то оно не делится на 6, и утверждения про делимость на 4 и 5 должны быть, наоборот верны.

В первом случае мы получаем числа, которые делятся на 6, но не делятся ни на 4, ни на 5. Таких двузначных чисел ровно пять: 18, 42, 54, 66 и 78. Во втором случае мы получаем числа, которые делятся на 20, но не делятся на 3. Таких чисел три: 20, 40 и 80. Всего получается 8 чисел.

Задача 3. (3 балла)

Все жители острова либо блондины, либо брюнеты с зелёными или голубыми глазами. Доля брюнетов среди голубоглазых составляет 65%. Доля голубоглазых среди блондинов составляет 70%. И, наконец, доля блондинов среди зеленоглазых составляет 10%. Сколько процентов населения острова составляют зеленоглазые брюнеты?

Ответ: 54

Решение:

Обозначим количество голубоглазых брюнетов за a, голубоглазых блондинов за b, зеленоглазых блондинов за c и зеленоглазых брюнетов за d.

Тогда $\dfrac{a}{a+b}=0,65$, откуда $\dfrac{a+b}{a}=\dfrac{20}{13}$ и $\dfrac{b}{a}=\dfrac{20}{13}-1=\dfrac{7}{13}$.

Аналогично $\dfrac{b}{b+c}=0,7$, откуда $\dfrac{b+c}{b}=\dfrac{10}{7}$ и $\dfrac{c}{b}=\dfrac{10}{7}-1=\dfrac{3}{7}$ и $\dfrac{c}{a}=\dfrac{c}{b}\cdot\dfrac{b}{a}=\dfrac{7}{13}\cdot\dfrac{3}{7}=\dfrac{3}{13}$.

Наконец, $\dfrac{c}{c+d}=0,1$, откуда $\dfrac{c+d}{c}=10$ и $\dfrac{d}{c}=10-1=9$ и $\dfrac{d}{a}=\dfrac{d}{c}\cdot\dfrac{c}{a}=9\cdot\dfrac{3}{13}=\dfrac{27}{13}$.

Тогда $\dfrac{a+b+c+d}{a}=1+\dfrac{b}{a}+\dfrac{c}{a}+\dfrac{d}{a}=1+\dfrac{7}{13}+\dfrac{3}{13}+\dfrac{27}{13}=\dfrac{50}{13}$.

Соответственно, $\dfrac{d}{a+b+c+d}=\dfrac{d}{a}\cdot\dfrac{a}{a+b+c+d}=\dfrac{27}{13}\cdot\dfrac{13}{50}=\dfrac{27}{50}=54\%$.

Задача 4. (3 балла)

Даны три числа: пятизначное, четырёхзначное и трёхзначное. Каждое из них состоит из одинаковых цифр (каждое — из своих). Может ли получиться так, что их сумма — пятизначное число, состоящее из пяти различных цифр?

Ответ: Да

Решение:

Вообще-то достаточно одного примера, но давайте поясним, как он получается.

Если при сложении переносов не происходит, три последние цифры суммы будут одинаковыми. Значит, нам надо добиться того, чтобы переносы из разряда единиц в разряд десятков и из разряда десятков в разряд сотен во-первых были, а, во-вторых, были различны.

Этого можно добиться, если сумма наших трёх цифр равна 19. Тогда при в разряде десятков, с учётом переноса 1, получается уже 20 а не 19, и в разряд сотен переносится 2. Тогда сумма чисел будет оканчиваться на 109, и в разряд десятков тысяч будет переносится двойка. Осталось добиться того, чтобы сумма цифр пятизначного и четырёхзначного числа оканчивалась не на 7, 8 или 9 (чтобы в сумме с двойком не получалось 9, 10 или 11), и чтобы сумма была пятизначной и ей первая цифра тоже отличалась от остальных.

Пример: $55555+6666+888=63109$

Задача 5. (3 балла)

В клетках таблицы 7×7 записаны попарно различные целые неотрицательные числа. Оказалось, что у любых двух чисел, находящихся в одной строке или одном столбце, отличаются неполные частные при делении на 8. Какое наименьшее значение может принимать наибольшее из чисел в таблице?

Ответ: 54

Решение: В каждой строке должны быть семь чисел, дающих различные неполные частные при делении на 8. Это значит, что в каждой строке есть как минимум одно число с неполным частным при делении на 8 равным 6 или больше (6, а не 7, поскольку минимальное значение неполного частного равно 0). Значит, в таблице есть хотя бы 7 чисел, не меньших, чем $6\cdot8=48$. Наибольшее из них не меньше чем $48+6=54$.

Такой вариант дейтсвительно возможен, если расставлять числа с одинаковыми неполными частными по диагоналям:

$0\cdot8+1$	$1\cdot8+1$	$2\cdot8+1$	$3\cdot8+1$	$4\cdot8+1$	$5\cdot8+1$	$6\cdot8+1$
$6\cdot8+2$	$0\cdot8+2$	$1\cdot8+2$	$2\cdot8+2$	$3\cdot8+2$	$4\cdot8+2$	$5\cdot8+2$
$5\cdot8+3$	$6\cdot8+3$	$0\cdot8+3$	$1\cdot8+3$	$2\cdot8+3$	$3\cdot8+3$	$4\cdot8+3$
$4\cdot8+4$	$5\cdot8+4$	$6\cdot8+4$	$0\cdot8+4$	$1\cdot8+4$	$2\cdot8+4$	$3\cdot8+4$
$3\cdot8+5$	$4\cdot8+5$	$5\cdot8+5$	$6\cdot8+5$	$0\cdot8+5$	$1\cdot8+5$	$2\cdot8+5$
$2\cdot8+6$	$3\cdot8+6$	$4\cdot8+6$	$5\cdot8+6$	$6\cdot8+6=54$	$0\cdot8+6$	$1\cdot8+6$
$1\cdot8+0$	$2\cdot8+0$	$3\cdot8+0$	$4\cdot8+0$	$5\cdot8+0$	$6\cdot8+0$	$0\cdot8+7$

Задача 6. (3 балла)

На каждой из шести граней куба написали число. Потом на каждом из двенадцати рёбер написали сумму чисел на двух соседних с ним гранях. Можно ли зная эти 12 чисел на рёбрах однозначно восстановить числа на гранях?

Ответ: Да

Решение:

Пусть на некоторой грани написано число a, а на соседних с ней — числа b, c, d и e (в таком порядке). Сложим числа на четырёх рёбрах, примыкающих к этой грани (это $a+b$, $a+c$, $a+d$ и $a+e$) и вычтем числа на двух рёбрах, выходящих из двух противоположных вершин нашей грани перпендикулярно ей (это числа $b+c$ и $d+e$). Получим число $4a$, разделив которое на 4, мы узнаем число на грани. Так можно сделать для любой грани.

Задача 7. (4 балла)

Докажите, что сумма длин диагоналей 21-угольника меньше, чем его периметр, умноженный на 54.

Доказательство:

Диагональ 21-угольника отсекает с одной стороны x сторон, а с другой $21-x$. Пусть x — меньшее из этих двух чисел, тогда $2\leqslant x\leqslant 10$. Вместе с этими x сторонами наша диагональ образует многоугольник (или ломаную), значит, её длина меньше суммы длин этих x сторон.

Запишем все полученные таким образом неравенства и сложим их. У нас получится, что сумма длин диагоналей меньше, чем сумма сторон, в которой каждая сторона посчитана некоторое количество раз.

Каждую сторону мы посчитали в этих неравенствах: два раза — для двух диагоналей, которые отсекают по две стороны; три раза — для трёх диагоналей, которые отсекают по три стороны; ... 10 раз — для десяти диагоналей, которые отсекают по 10 сторон. Итого $2+3+\ldots+10=54$.

Так как каждую сторону в этом неравенстве мы посчитали 54 раза, получается, что длин диагоналей 21-угольника меньше, чем его периметр, умноженный на 54.

Задача 8. (4 балла)

В Волшебной Стране 100 городов, некоторые города соединены между собой двусторонними авиалиниями. Между любыми двумя городами можно добраться, сделав не более 11 пересадок, причём единственным образом. Если из города A в город B нельзя добраться с 10 пересадками или менее, назовём их оба окраинными. Какое наибольшее число окраинных городов может быть в стране?

Ответ: 89

Решение:

Рассмотрим два окраинных города и маршрут между ними. Все 11 городов, в которых делаются пересадки на этом маршруте, окраинными быть не могут. Все остальные города могут быть окраинными, если из них ведут прямые рейсы в первый или последний из этих 11 промежуточных городов.

Значит, наибольшее количество окраинных городов составляет $100-11=89$.