1 Открытая олимпиада школьников 2021/2022 уч. год

1.1 Задания с решениями заключительного этапа олимпиады

1.1.1 Задания для 11 класса

(приведен один из вариантов заданий)

Задача 1. (2 балла)

Многочлен $P(x)$ таков, что $P(x^2)$ имеет $2n+1$ корней. Какое наменьшее количество корней может иметь производная многочлена $P(x)$?

(В обоих случаях имеются в виду различные корни, без учёта кратности).

Ответ: n.

Решение:

Если многочлен $P(x^2)$ имеет корень x_0, то он также имеет и корень $-x_0$, поэтому количество корней может быть нечётным только если один из корней — это число 0. Для каждой пары корней x_0, $-x_0$ многочлена $P(x^2)$ число x_0^2 является корнем многочлена $P(x)$; число 0 также является его корнем, поэтому у многочлена $P(x)$ не менее $n+1$ корня (могут быть ещё какие-то отрицательные корни, про них мы ничего не знаем).

Между каждыми двумя корнями многочлена $P(x)$ должен находиться корень производной этого многочлена, поэтому у производной не менее n корней.

Легко убедиться, что это значение достигается, например, для многочлена $x(x-1)\dots(x-n)$.

Задача 2. (2 балла)

Вася придумал новую операцию на множестве положительных чисел: $a\star b = a^{\ln b}$. Найдите логарифм числа $\dfrac{(ab)\star(ab)}{(a\star a)(b\star b)}$ по основанию $a\star b$.

Ответ: 2

Решение: Заметим, что $a\star b = a^{\ln b} = e^{\ln a \ln b}$. Также $ab = e^{\ln a+\ln b}$, то есть при операции $\star$ логарифмы чисел перемножаются, при умножении чисел — складываются, а при делении — вычитаются.

Обозначим $x=\ln a$ и $y=\ln b$. Тогда, согласно написанному выше, $\ln\dfrac{(ab)\star(ab)}{(a\star a)(b\star b)} = (x+y)(x+y)-x^2-y^2 = 2xy$, а $\ln(a\star b) = xy$. Искомое число равно частному этих логарифмов, то есть 2.

Задача 3. (3 балла)

$4^{27000}-82$ делится на 3^n. Какое наибольшее натуральное значение может принимать n?

Ответ: 5

Решение:

$4^{27000} = (1+3)^{27000} = 1+27000\cdot 3+\dfrac{27000\cdot 26999\cdot 3^2}{2}+\dfrac{27000\cdot\ldots\cdot 26998\cdot 3^3}{6}+$
$+\dfrac{27000\cdot\ldots\cdot 26997\cdot 3^4}{24}+\dfrac{27000\cdot\ldots\cdot 26996\cdot 3^5}{120}\dots$

Два последних выписанных слагаемых делятся на 3^6, как и все остальные слагаемые, заключённые в многоточие.

$$1+27000\cdot 3+\frac{27000\cdot 26999\cdot 3^2}{2}+\frac{27000\cdot 26999\cdot 26998\cdot 3^3}{6} = 1+81000+$$

$$+\frac{27000\cdot 26999\cdot 3^2+27000\cdot 26999\cdot 26998\cdot 3^2}{2}$$

$1+81000=1+81(1+999)=1+81+81\cdot 999=1+82+81\cdot 999$, что даёт остаток 82 при делении на 3^6, так как последнее слагаемое делится на 3^6.
$\dfrac{27000\cdot 26999\cdot 3^2+27000\cdot 26999\cdot 26998\cdot 3^2}{2}=\dfrac{27000\cdot 26999\cdot 3^2\cdot(1+26998)}{2}$, а это число, очевидно, делится на 3^5, но не на 3^6. Значит, $4^{27000}-82$ также делится на 3^5, но не на 3^6

Задача 4. (3 балла)

Окружности O_1 радиуса b и O_2 радиуса c касаются в точке O — центре окружности O_3 радиуса a. Точка A — одна из точек пересечения окружностей O_1 и O_3. Окружность O_4 касается окружности O_1 в точке A и окружности O_2 в точке B. Точка C — такая точка на прямой OB, что треугольники OAB и OCA подобны. Найдите AC.

Все указанные в условии касания происходят внешним образом.

Ответ: $\dfrac{a^2}{2}\left(\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)$.

Решение: Применим инверсию относительно окружности O_3. Окружность O_3 перейдёт сама в себя, окружности O_1 и O_2 — в параллельные прямые ℓ_1 и ℓ_2, первая из которых проходит через точку A, переходящую при инверсии переходит сама в себя.

Точки B и C переходят при этой инверсии друг в друга, поскольку $a^2=OA^2=OB\cdot OC$ (это равенство следует из подобия треугольников OAB и OCA; никаким другим образом эти треугольники подобны быть не могут, так как у них общий угол O, а точки B и C мы предполагаем различными).

Окружность O_4 переходит в окружность, касающуюся прямых ℓ_1 и ℓ_2 в точках A и C соответственно. Так как прямые параллельны, это значит, что длина отрезка AC равна расстоянию между этими прямыми.

Опустим из точки O перпендикуляр на прямую ℓ_1. Это перпендикуляр пересечёт окружность O_1 в точке X, инверсной основанию перпендикуляра H и диаметрально противоположной O. Это значит, что $OH=\dfrac{a^2}{OX}=\dfrac{a^2}{2b}$.

Аналогично расстояние от O до ℓ_2 составляет $OH=\dfrac{a^2}{OX}=\dfrac{a^2}{2c}$. Искомое расстояние между двумя прямыми составляет сумму этих величин, поскольку точка O находится между прямыми ℓ_1 и ℓ_2, так как иначе окружности O_1 и O_2 касались бы внутренним образом.

Задача 5. (3 балла)

Положительные числа x, y и z таковы, что $x+y+z=5$. Какое наименьшее значение может принимать величина $x^2+y^2+2z^2-x^2y^2z$?

Ответ: -6

Решение:

Перепишем условие как $\dfrac{x}{2}+\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{2}+\dfrac{y}{2}+z=5$ и запишем для этих пяти чисел неравенство о среднем арифметическом и среднем квадратичном:

$$1=\frac{\frac{x}{2}+\frac{x}{2}+\frac{y}{2}+\frac{y}{2}+z}{5}\leqslant\sqrt{\frac{\frac{x^2}{4}+\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}+\frac{y^2}{4}+z^2}{5}}=\sqrt{\frac{x^2+y^2+2z^2}{10}},$$

откуда $x^2+y^2+2z^2\geqslant 10$. Теперь запишем для этих же чисел неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом:

$$1=\frac{\frac{x}{2}+\frac{x}{2}+\frac{y}{2}+\frac{y}{2}+z}{5}\geqslant\sqrt[5]{\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{y}{2}\cdot\frac{y}{2}\cdot z},$$

откуда $x^2y^2z\leqslant 16$. Значит, $x^2+y^2+2z^2-x^2y^2z\geqslant 10-16=-6$. Минимум достигается, когда все числа, для которых применяются неравенства о средних, равны между собой, то есть $x=y=2$, $z=1$.

Задача 6. (3 балла)

Дана четырёхугольная пирамида $OABCD$, в основании которой лежит параллелограмм $ABCD$. Плоскость α пересекает ребра OA, OB, OC и OD пирамиды в точках A', B', C' и D' соответственно. Известно, что $\dfrac{OA'}{OA}=\dfrac{1}{a}$, $\dfrac{OB'}{OB}=\dfrac{1}{b}$, $\dfrac{OC'}{OC}=\dfrac{1}{c}$. Найдите $\dfrac{V_{OABCD}}{V_{OA'B'C'D'}}$.

Ответ: $\dfrac{2abc(a-b+c)}{a+c}$

Решение:

$ABCD$ — параллелограмм, поэтому $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$, и, следовательно, $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$.

Если точка X принадлежит плоскости $A'B'C'$, а $\overrightarrow{OX}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}$, коэффициенты x, y и z удовлетворяют уравнению $ax+by+cz=1$ (это, как известно, уравнение плоскости, даже если система координат не декартова, а точки A', B' и C' этому уравнению, очевидно, удовлетворяют).

$\overrightarrow{OD'}=t\overrightarrow{OD}=t\overrightarrow{OC}+t\overrightarrow{OA}-t\overrightarrow{OB}$, поэтому $at-bt+ct=1$, откуда $t=\dfrac{1}{a-b+c}$.

Поскольку треугольники ABC и ACD равны, $V_{OABC}=V_{OACD}=\frac{1}{2}V_{OABCD}$.

Объёи пирамиды, образованной тремя векторами, в 6 раз меньше объёма параллелограмма, натянутого на эти векторы, а этот объём, в свою очередь, (при одинаковых направлениях) пропорционален длинам этих векторов. Поэтому $\dfrac{V_{OA'B'C'}}{V_{OABC}}=\dfrac{1}{abc}$, а $\dfrac{V_{OA'C'D'}}{V_{OACD}}=\dfrac{t}{ac}==\dfrac{1}{ac(a-b+c)}$.

Значит, $\dfrac{V_{OA'B'C'D'}}{V_{OABCD}}=\dfrac{V_{OA'B'C'}}{V_{OABCD}}+\dfrac{V_{OA'C'D'}}{V_{OABCD}}=\dfrac{V_{OA'B'C'}}{2V_{OABC}}+\dfrac{V_{OA'C'D'}}{2V_{OACD}}=\dfrac{1}{2abc}+\dfrac{1}{2ac(a-b+c)}=\dfrac{a-b+c+b}{2abc(a-b+c)}=$ $=\dfrac{a+c}{2abc(a-b+c)}$. Обратная величина является ответом к задаче.

Задача 7. (4 балла)

Дан правильный n-угольник, в котором проведены все диагонали. Докажите, что они образуют не больше
$\dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}-\dfrac{n}{4}\cdot\left(\dfrac{n}{2}-1\right)+1-\dfrac{n}{2}\cdot\left(\dfrac{n}{2}-1\right)\cdot\left(\dfrac{n}{2}-3\right)$ точек пересечения (не считая вершин).

Число n во всех вариантах задачи представляется в виде $n=4k+2$, где k натуральное число.

Доказательство:

Если бы все точки пересечения диагоналей были различны, для их подсчёта достаточно было бы посчитать общее количество способов выбрать 4 вершины n-угольника. Действительно, каждая пара пересекающихся диагоналей даёт нам 4 вершины; с другой стороны, для каждых 4 вершин отрезок, соединяющий первую и третью по часовой стрелке, и отрезок, соединяющий вторую и четвёртую, будут пересекающимися диагоналями (сторонами они не могут быть, так как стороны ни с чем не пересекаются). Количество таких способов составляет $\dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$. Однако, при таком подсчёте точки, в которых пересекаются больше двух диагоналей, посчитаны несколько раз.

Во-первых, поскольку количество вершин чётно, $\dfrac{n}{2}$ "длинных" диагоналей (соединяющий противоположные вершины многоугольника) пересекаются в центре многоугольника. Эта точка посчитана $\dfrac{\frac{n}{2}\cdot\left(\frac{n}{2}-1\right)}{2}$ раз, в то время как должна быть посчитана 1 раз. Значит, из вычисленного количества надо вычесть $\dfrac{\frac{n}{2}\cdot\left(\frac{n}{2}-1\right)}{2}-1$.

Во-вторых, для каждой "длинной" диагонали можно взять две симметричные относительно неё диагонали, не проходящие через центр многоугольника. "Длинную" диагональ можно выбрать $\dfrac{n}{2}$ способами. Для удобства представим себе, что выбранная диагональ расположена вертикально. По каждую сторону от этой диагонали остаётся $\frac{n}{2} - 1$ вершина. Мы выбираем вершину A слева от “длинной” диагонали, после чего для выбора вершины B справа у нас остаётся $\frac{n}{2} - 3$ варианта: мы не можем выбрать вершину, симметричную A относительно “длинной” диагонали (иначе диагональ AB будет симметрична сама себе) и вершину, симметричную относительно центра, иначе AB будет “длинной”, а эти точки пересечения мы уже учли.

Симметричная диагональ $A'B'$ выбирается единственным образом. Однако каждую пару диагоналей AB и $A'B'$ мы посчитали дважды, потому что в качестве первой выбранной диагонали могла быть взята любая из них. Таким образом, точку пересечения трёх диагоналей мы умеем искать $\dfrac{\frac{n}{2} \cdot \left(\frac{n}{2} - 1\right) \cdot \left(\frac{n}{2} - 3\right)}{2}$ способами. В исходной формуле каждая такая точка посчитана трижды, то есть два лишних раза. Значит, мы получаем ещё на $\frac{n}{2} \cdot \left(\frac{n}{2} - 1\right) \cdot \left(\frac{n}{2} - 3\right)$ точек меньше.

Вычитая из исходного количества пересечений оба эти выражения мы получаем в точности то, что и требовалось. Если какие-то точки, посчитанные в предыдущем абзаце, на самом деле совпадают, то вычитать надо ещё больше.

Задача 8. (5 баллов)

В таблице 8×8 какие-то 23 клетки чёрные, а остальные — белые. В каждой белой клетке написали суммарное количество чёрных, находящихся с ней на одной горизонтали и находящихся с ней на одной вертикали; в чёрных клетках ничего не написано. Какое наибольшее значение может принимать сумма чисел во всей таблице?

Ответ: 234

Решение:

Число в белой клетке состоит из двух слагаемых: “горизонтального” и “вертикального”. Рассмотрим отдельно сумму всех “горизонтальных” и отдельно сумму всех “вертикальных” слагаемых по всей таблице. Если мы максимизируем каждую из этих двух сумм по отдельности, общая сумма также будет наибольшей.

Рассмотрим сумму ”горизонтальных” слагаемых. Если в строке находится x_i чёрных клеток и $8-x_i$ белых, то сумма горизонтальных слагаемых в этой строке составляет $x_i(8-x_i)$. Просуммировав эту сумму по всем строкам, мы получаем $8(x_1 + \ldots + x_8) - x_1^2 - \ldots - x_8^2 = 8 \cdot 23 - (x_1^2 + \ldots + x_8^2)$. Нам нужно максимизировать это выражение, т.е. минимизировать сумму квадратов восьми чисел, сумма которых составляет 23. Как известно, сумма квадратов чисел уменьшается при сближении этих чисел к их среднему арифметическом, поэтому для целых чисел минимум достигается, когда семь из восьми чисел равны 3, а оставшееся равно 2.

Таким образмо, мы получаем, что наименьшая возможная сумма ”горизонтальных” слагаемых равна $8 \cdot 23 - 7 \cdot 3^2 - 2^2 = 117$. Аналогичную оценку можно получить для суммы “вертикальных” слагаемых, что даёт нам итоговое значение 234.

Осталось убедиться, что существует раскраска таблицы, при которой обе сумммы максимальны одновременно, то есть в которой в каждом столбце или строке по 2 или 3 закрашенных клетки.