1.1.2 Задания для 10 класса

(приведен один из вариантов заданий)

Задача 1. (2 балла)

У многочлена $P(x^2)$ 17 различных корней (без учёта кратности). Верно ли, что $P(0) = 0$?

Решение:

Если многочлен $P(x^2)$ имеет корень x_0, то он также имеет и корень $-x_0$, поэтому количество корней является нечётным тогда и только тогда, когда один из корней — это число 0.

Задача 2. (2 балла)

$\sin x \sin 3x = \frac{5}{16}$. Найдите $\cos x \cos 3x$.

Если возможных ответов несколько, запишите их через точку с запятой.

Ответ: 7/16; -9/16

Решение:

Общий вид задачи: $\sin x \sin 3x = \frac{5}{16} = \alpha$.

$\alpha = \sin x \sin 3x = \sin x(3 \sin x - 4 \sin^3 x) = 3 \sin^2 x - 4 \sin^4 x$.

Обозначим $\sin^2 x$ за t и получим квадратное уравнение на t: $4t^2 - 3t + \alpha = 0$, откуда $t = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4\alpha}}{8}$.

С другой стороны, $\cos x \cos 3x = \cos x(4 \cos^3 x - 3 \cos x = 4 \cos^4 x - 3 \cos^2 x$. Учитывая, что $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - t$, мы получаем, что $\cos x \cos 3x = 4(1-t)^2 - 3t = 4t^2 - 11t + 4 = \alpha - 8t + 4$. Подставляя значение α, полученное при решении квадратного уравнения, получаем итоговый ответ.

Задача 3. (3 балла)

Последовательность задана формулой $x_{n+3} = 2x_{n+2} + x_{n+1} - 2x_n$. Кроме того известно, что $x_0 = 0$, $x_2 = 1$. Найдите x_{100}

Ответ: $\frac{4^{50} - 1}{3} = 422550200076076467165567735125$.

Решение:

Из рекуррентного соотношения мы получаем, что $x_{n+3} - x_{n+1} = 2(x_{n+2} - x_n)$. Из того, что $x_2 - x_0 = 1$, мы получаем $x_{n+2} - x_n = 2^n$. Отсюда $x_{100} = (x_{100} - x_{98}) + (x_{98} - x_{96}) + \ldots + (x_2 - x_0) + x_0 = 2^{98} + 2^{96} + \ldots + 1 = 4^{49} + 4^{48} + \ldots + 1 = = \frac{4^{50} - 1}{4 - 1} = \frac{4^{50} - 1}{3}$.

Задача 4. (3 балла)

Петя написал на доске число 11234567, а затем все числа, получающиеся из него перестановкой цифр, в порядке возрастания. Каким по счёту оказалось написано число 46753211?

Ответ: 12240

Решение:

Номер числа — это количество чисел, которые выписаны не позднее, чем оно. Числа, выписанные не позднее, чем 46753211 это:

(1) Числа начинающиеся на 1. Остальные цифры в этом случае можно расставить $7! = 5040$ способами.

(2) Числа начинающиеся на 2 или 3. Для каждого варианта первой цифры остальные можно расставить $\frac{7!}{2}!$ способами. В итоге получается ещё 5040 чисел.

(3) Числа начинающиеся на 41. Остальные шесть цифр можно расставить $6! = 720$ способами.

(4) Числа начинающиеся на 42, 43, 45 и 46 (включая само наше число, которое в списке начинающихся на 46 чисел идёт последним). Остальные шесть цифр для кажлого из вариантов можно расставить $\frac{6!}{2}$ способами.

Итого получаем $5040 \cdot 2 + 720 + 360 \cdot 4 = 12240$.

Задача 5. (3 балла)

Окружности O_1, O_2 и O_3 находятся внутри окружности O_4 радиуса 6, касаясь её внутренним образом, а друг друга внешним. При этом окружности O_1 и O_2 проходят через центр окружности O_4. Найдите радиус окружности O_3.

Ответ: 2

Решение:

Решим задачу в общем виде для всех вариантов, а именно, докажем, что если радиус окружности O_4 равен R, то радус окружности O_3 равен $\frac{R}{3}$.

Поскольку окружности окружности O_1 и O_2 проходят через центр окружности O_4 и одновременно касаются её внутренним образом, для каждой из них центр окружности O_4 диаметрально противоположен точке касания. Это значит, что радиус каждой из них составляет $\frac{R}{2}$. Кроме того, они касаются друг друга в центре окружности O_4, что означает, что центры всех этих трёх окружностей лежат на одной прямой.

Рассмотрим теперь треугольник, образованный центрами окружностей O_1 и O_2 (назовём их A и B) и точкой касания окружностей O_2 и O_3 (назвоём её C). Из соображений симметрии ясно, что $AC = BC$. Кроме того, точка O (центр окружности O_4) является серединой стороны AB. Значит, треугольник OAC прямоугольный, причём $OA = \frac{R}{2}$, $OC = R$.

Рассотрим теперь точку X (центр окружности O_3). Она лежит на отрезке OC, поэтому треугольник OAX также прямоугольный. Его катеты $OA = \frac{R}{2}$ и $OX = R - r$, а гипотенуза $AX = \frac{R}{2} + r$, где r искомый радиус окружности O_3. По теореме Пифагора $\frac{R^2}{4} + R^2 - 2Rr + r^2 = \frac{R^2}{4} + Rr + r^2 =$, откуда $3Rr = R^2$ и $r = \frac{R}{3}$

Задача 6. (4 балла)

Обозначим за $\sigma(n)$ сумму всех делителей числа n (включая само число). Для каких n выполняется неравенство $\sigma(8n) > \sigma(9n)$?

Решение:

Для каждого простого множителя p, такого, что n делится на p^k, но не делится на p^{k+1} $\sigma(n)$ вклад $(1 + p + \ldots + p^k)$, или, если записать это строго, при $n = \prod_{i=1}^{m} p_i^{k_i}$ выполняется равенство $\sigma(n) = \prod_{i=1}^{m} \left(1 + p_i + \ldots + p_i^{k_i}\right)$.

Отсюда видно, что при домножении или делении числа n на какой-то множитель, взаимно простой с числами 8 и 9 (то есть, не кратный ни 2, ни 3), правая и левая части неравенства $\sigma(8n) > \sigma(9n)$ изменяются в одинаковое количество раз. Значит, нам достаточно найти все решения вида $n = 2^k 3^l$ — все остальные можно будет получить из них домножением на какое-то число x, не делящееся ни на 2, ни на 3.

Тогда $\sigma(8n) = (1 + 2 + \ldots + 2^{k+3})(1 + 3 + \ldots + 3^l)$, а $\sigma(9n) = (1 + 2 + \ldots + 2^k)(1 + 3 + \ldots + 3^{l+2})$. Их частное должно быть больше 1:

$$\frac{\sigma(8n)}{\sigma(9n)} = \frac{\dfrac{1 + 2 + 4 + 8 + \ldots + 2^{k+3}}{1 + 2 + \ldots + 2^k}}{\dfrac{1 + 3 + 9 + \ldots + 3^{l+2}}{1 + 3 + \ldots + 3^l}} = \frac{\dfrac{7}{1 + 2 + \ldots + 2^k} + 8}{\dfrac{4}{1 + 3 + \ldots + 3^l} + 9} > 1$$

Знаменатель этой дроби всегда больше 9. Числитель же равен 9 при $k = 2$ и меньше 9 при больших k. Осталось разобрать два случая: $k = 1$ и $k = 0$.

При $k = 1$ имеем:

$$\frac{7}{3} + 8 > \frac{4}{1 + 3 + \ldots + 3^l} + 9$$

$$10\frac{1}{3} > 9 + \frac{4}{1 + 3 + \ldots + 3^l}$$

Правая часть равна 13 при $l = 0$. При $k \geqslant 1$ правая часть не больше 10. Значит, $\sigma(8n) > \sigma(9n)$ при $k = 1$ и $l \geqslant 1$.

При $k = 0$ имеем:

$$15 > 9 + \frac{4}{1 + 3 + \ldots + 3^l}$$

Это равенство всегда верно. Таким образом, у нас есть две серии ответов:

Ответ: $n = 3^l x$ или $n = 6 \cdot 3^l x$, где l — целое неотрицательно число, а x — натуральное число, не делящееся ни на 2, ни на 3.

Задача 7. (4 балла)

В таблице 7×7 какие-то клетки чёрные, а остальные — белые. В каждой белой клетке написали суммарное количество чёрных, находящихся с ней на одной горизонтали или вертикали; в чёрных клетках ничего не написано. Какое наибольшее значение может принимать сумма чисел во всей таблице?

Ответ: 168

Решение:

Число в белой клетке состоит из двух слагаемых: "горизонтального" и "вертикального". Рассмотрим отдельно сумму всех "горизонтальных" и отдельно сумму всех "вертикальных" слагаемых по всей таблице. Если мы максимизируем каждую из этих двух сумм по отдельности, общая сумма также будет наибольшей.

Рассмотрим сумму "горизонтальных" слагаемых. Если в строке находится x чёрных клеток и $7 - x$ белых, то сумма горизонтальных слагаемых в этой строке составляет $x(7 - x)$. Эта величина максимальна при $x = 3$ и $x = 4$ и равна 12. Значит, максимальная сумма "горизонтальных" слагаемых составляет $7 \cdot 12 = 84$, а всех чисел, соответственно, 168.

Это значение достигается, например, для шахматной раскраски — легко убедиться, что в каждой строке и каждом столбце действительно 3 или 4 чёрных клетки.

Задача 8. (4 балла)

На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC взятые точки C_1, A_1 и B_1 соответственно такие, что

(1) ни одна из них не является серединой стороны;

(2) прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке;

(3) перпендикуляры, восстановленные к сторонам треугольника в точках C_1, A_1 и B_1, также пересекаются в одной точке;

(4) сумма отрезков AB_1, BC_1 и CA_1 равна полупериметру треугольника ABC.

Докажите, что A_1, B_1 и C_1 либо точки касания вписанной окружности треугольника ABC, либо точки касания вневписанных окружностей треугольника ABC с его сторонами.

Решение:

Из условия (2), по теореме Чевы, следует, что $AB_1 \cdot BC_1 \cdot CA_1 = B_1C \cdot C_1A \cdot A_1B$.

Условие (4) можно переписать как $AB_1 + BC_1 + CA_1 = B_1C + C_1A + A_1B$.

Из условия (4), по теореме Карно, следует, что $AB_1^2 + BC_1^2 + CA_1^2 = B_1C^2 + C_1A^2 + A_1B^2$.

Вычитая это равенство из равенства $(AB_1 + BC_1 + CA_1)^2 = (B_1C + C_1A + A_1B)^2$, получаем, что сумма попарных произведений длин отрезков AB_1, BC_1 и CA_1 равна такой же сумме для отрезков B_1C, C_1A и A_1B.

Если у двух троек чисел совпадают сумма, произведение и сумма попарных произведений, то это одна и та же тройка чисел, но неизвестно в каком порядке. (Этот факт может быть известен сам по себе, ещё он следует из теоремы Виета для многочленов третьей степени).

Три числа можно сопоставить другим трём числам шестью способами, поэтому у нас шесть возможных случаев:

1) $AB_1 = B_1C$, $BC_1 = C_1A$ и $CA_1 = A_1B$. В этом случае A_1, B_1 и C_1 — середины сторон треугольника ABC, а точка M — точка пересечения медиан.

2) $AB_1 = AC_1$, $BC_1 = BA_1$, $CA_1 = CB_1$. В этом случае A_1, B_1 и C_1 — точки касания вписанной окружности треугольника ABC, а точка H — её центр.

3) $AB_1 = BA_1, CA_1 = AC_1, BC_1 = CB_1$. В этом случае $AB_1 = p-(BC_1+CA_1) = p-(BC_1-C1_A) = p-AB$. Аналогичные равенства можно написать для остальных отрезков, откуда A_1, B_1 и C_1 — точки касания вневписанных окружностей треугольника ABC с его сторонами.

4) $AB_1 = BA_1$, $CA_1 = CB_1$, $BC_1 = AC_1$. В этом случае $AC = AB_1 + CB_1 = BA_1 + CA_1 = AB$, то есть треугольник ABC равнобедренный, а точка C_1 — середина стороны AB.

Остальные два случая эквивалентны случаю 4), только равны будут другие стороны треугольника.

В каждом из вариантов условие (1) исключает часть возможных случаев, а оставшиеся два могут реализоваться.