

## 1.2 Задания 1 отборочного этапа олимпиады

### 1.2.1 Задания для 11 класса

(приведен один из вариантов заданий)

#### Задача 1. (2 балла)

Последовательность  $\{x_n\}$  задана условиями  $x_1 = 1$  и  $x_{n+1} = \frac{1}{x_n} + \frac{1}{n}$ . Найдите  $x_{1000}$ . Ответ запишите в виде несократимой правильной или неправильной дроби, не округляйте.

**Ответ:** 1000/999

#### Задача 2. (2 балла)

Девять футбольных команд сыграли турнир в один круг на нейтральном поле (каждые две команды сыграли между собой один раз). Все матчи закончились с разным счётом (результаты 0:1 и 1:0 считаются одинаковыми). Какое наименьшее количество голов могло быть забито во всём турнире?

**Ответ:** 235

#### Задача 3. (3 балла)

В клубе состоят 11 джентльменов, некоторые из них знакомы между собой. Оказалось, что любую четвёрку джентльменов можно разбить на две пары так, чтобы в каждой паре джентльмены были знакомы между собой. Найдите наименьшее возможное количество пар знакомых в этом клубе.

**Ответ:** 44

#### Задача 4. (3 балла)

Положительные вещественные числа  $x$  и  $y$  таковы, что  $[x]\{x\}[y]\{y\} = 17$ . Какое наименьшее целое значение может принимать число  $x + y$ ?

Как обычно,  $[x]$  означает целую часть числа  $x$ , а  $\{x\}$  — дробную.

**Ответ:** 18

#### Задача 5. (3 балла)

Куб  $10 \times 10 \times 10$  разбит на тысячу единичных кубиков, которые мы будем называть ячейками. В ячейках стоят целые числа, в одной из ячеек стоит число 1. Числа в соседних ячейках (то есть ячейках, имеющих общую грань) отличаются на 1. Какое наибольшее значение может принимать сумма чисел во всём кубе?

**Ответ:** 14500

#### Задача 6. (3 балла)

В четырёхугольнике  $ABCD$  продолжения сторон  $BC$  и  $AD$  пересекаются в точке  $M$ , а диагонали в точке  $K$ . Оказалось, что  $\angle ACB + \angle ADB = 180^\circ$ ,  $AM : BM = 7 : 9$ ,  $AC : BD = 9 : 8$  и  $AD : BC = 7 : 10$ . Найдите отношение  $AK : BK$ .

**Ответ:** 392:810 || 196:405

#### Задача 7. (3 балла)

Непрерывная и непрерывно дифференцируемая функция  $f(x)$  такова, что  $f(0) = f'(0) = 0$ . Её график повернули на  $10^\circ$  против часовой стрелки, после чего получился график какой-то другой функции. Какое наибольшее целое значение может принимать функция  $f'(x)$ ?

**Ответ:** 5

#### Задача 8. (3 балла)

В жёлобе, имеющем форму двугранного прямого угла, лежат три сферы радиусами 4, 6 и 9 именно в таком порядке, причём вторая сфера касается двух оставшихся. Найдите расстояние между центрами первой и третьей сфер.

**Ответ:** 25

**Задача 9. (4 балла)**

Вещественные числа  $a$ ,  $b$  и  $c$  таковы, что  $\log_a b + \log_b c + \log_c a = 10$ . Какое наибольшее целое значение может принимать сумма  $\log_a c + \log_b a + \log_c b$ ?

**Ответ:** 25

**Задача 10. (5 баллов)**

Числа  $p$  и  $q$  — простые. Степени числа  $q$  при делении на  $p$  дают ровно три различных остатка. Степени числа  $p$  при делении на  $q$  также дают ровно три различных остатка. В ответе укажите наименьшее возможное значение числа  $p$  и соответствующее ему число  $q$ .

**Ответ:**  $p=13$   $q=61$