1.3 Задания 2 отборочного этапа олимпиады

1.3.1 Задания для 11 класса

Ниже приведен один из вариантов заданий.

Задача 1. (2 балла)

Найдите сумму

$$\frac{1}{1+\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}}+\frac{1}{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3\cdot 5}+\sqrt[3]{25}}+\frac{1}{\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{5\cdot 7}+\sqrt[3]{49}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt[3]{727^2}+\sqrt[3]{727\cdot 729}+\sqrt[3]{729^2}}$$

Задача 2. (3 балла)

Вася взял некоторое число и уменьшил его в два раза. Получившееся число он также уменьшил в два раза, и так далее. Через 1000 операций он впервые получил число, меньшее 10. Петя взял то же самое число и уменьшил его в три раза. Получившееся число он также уменьшил в три раза, и так далее. Через какое наименьшее количество операций он мог получить число, меньшее 10?

Задача 3. (3 балла)

Найдите $\sin(\cos(\sin(\cos\ldots\sin(\cos 7)\ldots)$.
Синус и косинус в формуле чередуются и повторяются миллиард раз.
Ответ округлите ВНИЗ до десятых.

Задача 4. (3 балла)

$P(x)$ — многочлен четвёртой степени. $P(7)-P(1)=16$, $P'(1)=3$, $P'(7)=5$. Найдите $P'(4)$.

Задача 5. (3 балла)

Сечение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ размером $20\times 20\times 20$ представляет из себя четырёхугольник, содержащий вершины A и C_1, и имеет целочисленную площадь. Какое наименьшее значение может принимать эта площадь?

Задача 6. (3 балла)

Сколько решений в натуральных числах имеет уравнение $x+2y+3z=100$?

Задача 7. (3 балла)

Две окружности пересекаются в точках A и B. Отрезок CD проходит через точку A, а отрезок KM — через точку B, при этом точки C и K лежат на первой окружности, а точки D и M — на второй. Кроме того, $CD \parallel KM$. $AC=7$, $AD=6$, $BM=12$, $S_{ABKC}=16$. Найдите AB.

Задача 8. (3 балла)

В треугольнике ABC проведена медиана BM. Точка D — середина отрезка AM. На прямой BC взята точка E, а на прямой BD — точка F. Оказалось, что BM — медиана и в треугольнике BEF тоже. L — точка пересечения прямых EF и AB. $FL=4$. Найдите EM.

Задача 9. (3 балла)

В клубе собирателей открыток 15 человек, некоторые их них дружат между собой, у каждого есть хотя бы один друг. Каждый из членов клуба взял 60 открыток и разослал их всем своим друзьям, каждому — одинаковое количество. Какое наибольшее число открыток в сумме могли получить два члена клуба от своих друзей (включая, возможно, друг друга)?

Задача 10. (5 баллов)

Юра расставляет коней на доске 8×8. После этого он подсчитывает очки следующим образом: за каждого коня Юра получает 15 очков минус количество других коней, которые бьёт этот конь. Запас коней не ограничен.

Какое наибольшее количество очков мог набрать Юра?