

1 Открытая олимпиада школьников 2020/2021 уч. год

1.1 Задания с решениями заключительного этапа олимпиады

1.1.1 Задания для 11 класса

Ниже приведен один из вариантов заданий.

Задача 1. (2 балла)

Кубический многочлен имеет три корня. Наибольшее его значение на отрезке $[4; 9]$ достигается при $x = 5$, а наименьшее при $x = 7$. Найдите сумму корней многочлена.

Задача 2. (3 балла)

Найдите сумму натуральных чисел от 1 до 3000 включительно, имеющих с числом 3000 общие делители, большие 1.

Задача 3. (3 балла)

Палиндром — это слово, которое не меняется, если в нём переставить буквы в обратном порядке, например $abcba$. Сколько различных 11-буквенных слов можно составить из букв a, b, c, d, e так, чтобы они не содержали палиндромов длины больше 1?

Задача 4. (3 балла)

Положительные числа x, y и z таковы, что $xyz = 8$ и $x \leq z$. Докажите неравенство $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{6} \geq \frac{2x}{z}$

Задача 5. (3 балла)

Вася выбрал четыре числа и для каждой пары вычислил логарифм большего по основанию меньшего. Получилось шесть логарифмов. Четыре из них равны 15, 20, 21 и 28. Какие значения может принимать наибольший из всех шести логарифмов?

Задача 6. (4 балла)

Четырёхугольник $ABCD$ описан вокруг окружности с центром в точке O . K, L, M, N — точки касания сторон AB, BC, CD и AD соответственно, KP, LQ, MR и NS — высоты в треугольниках OKB, OLC, OMD, ONA . $OP = 15, OA = 32, OB = 64$.

Найдите длину отрезка QR .

Задача 7. (4 балла)

Два куба с ребром $12\sqrt[4]{\frac{8}{11}}$ имеют общую грань. Сечение одного из этих кубов некоторой плоскостью — треугольник площади 16. Сечение другого той же плоскостью — четырёхугольник. Какое наибольшее значение может принимать его площадь?

Задача 8. (4 балла)

Гензель и Гретель играют в игру, Гензель ходит первым. Они по очереди ставят фишки на клетчатую доску 7×8 (7 строк и 8 столбцов). Каждый раз, когда Гретель ставит фишку, она получает 4 очка за каждую фишку, уже стоящую в той же строке и 3 очка за каждую фишку, уже стоящую в том же столбце.

На одной клетке может стоять только одна фишка. Игра заканчивается, когда все клетки доски заполнены.

Какое наибольшее количество очков может заработать Гретель вне зависимости от действий Гензеля?