1.3.2 Задания для 10 класса

Ниже приведен один из вариантов заданий.

Задача 1. (2 балла)

Дан квадрат с вершинами в целых точках, стороны которого параллельны осям координат. Треугольник площади 7, вершины которого также находятся в целых точках, лежит строго внутри квадрата, в частности, вершины треугольника не лежат на границе квадрата. Какое наименьшее значение может принимать сторона квадрата?

Задача 2. (3 балла)

$P(x)$ — кубический многочлен. Известно, что $P(2) = -1$, $P(3) = 1$, $P(4) = 4$, $P(6) - P(5) = 11$. Найдите $P(6)$.

Задача 3. (3 балла)

Последовательность задана условиями $a_0 = \sqrt{2021}$, $a_{n+1} = \dfrac{1}{a_n - [a_n]}$. Найдите $[a_{2020}]$.

Квадратные скобки обозначают целую часть числа.

Задача 4. (3 балла)

Какой остаток при делении на 100! даёт число $101^{100!+2}$?

Задача 5. (3 балла)

$ABCD$ — равнобокая (или, что то же самое, равнобедренная) трапеция, $AD = 13$, $BC = 7$. Перпендикуляры BH и BK, опущенные из точки B на прямые AD и CD, оказались равны. M — точка пересечения BC и HK. Найдите BM.

Задача 6. (3 балла)

Функция имеет вид $f(x) = \dfrac{ax - b}{bx + a}$, $b \neq 0$. Известно, что $f(f(f(x))) = x$ везде, где левая часть равенства существует. Найдите $f(0)^2$.

Задача 7. (3 балла)

В клубе собирателей открыток 15 человек, некоторые их них дружат между собой, у каждого есть хотя бы один друг. Каждый из членов клуба взял 60 открыток и разослал их всем своим друзьям, каждому — одинаковое количество. Какое наибольшее число открыток мог получить член клуба от своих друзей?

Задача 8. (3 балла)

Гоша расставляет ферзей на доске 8×8. После этого он подсчитывает очки следующим образом: за каждого ферзя Гоша получает 8 очков минус количество других ферзей, которые бьёт этот ферзь. Запас ферзей не ограничен.

Какое наибольшее количество очков мог набрать Гоша?

Задача 9. (4 балла)

$ABCD$ — вписанный четырёхугольник. Лучи DA и CB пересекаются в точке M. $AM = 8$, $BM = 6$, $AB = 6$, $AD = 9$. Найдите квадрат диагонали AC.

Задача 10. (4 балла)

Даны 11 натуральных чисел с суммой 40. Какое наименьшее значение может принимать сумма всех 55 чисел, обратных к их попарным произведениям?

Ответ запишите в виде правильной или неправильной дроби.