1.1.3 Задания для 9 класса

Ниже приведен один из вариантов заданий.

Задача 1. (2 балла)

Пусть x, y, z — попарно взаимно простые трёхзначные натуральные числа. Какое наибольшее значение может принимать НОД$(x + y + z, xyz)$?

Ответ: 2994

Решение:

НОД двух чисел не может быть больше какого-то из них. Наибольшее возможное значение $x + y + z = 997 + 998 + 999 = 2994$ и для этих чисел как раз xyz делится на $x + y + z = 2994 = 3 \cdot 998$.

Задача 2. (2 балла)

На окружности отмечены 10 точек. Любые три из них образуют три вписанных угла. Петя посчитал количество различных значений, которые принимают эти углы. Какое наибольшее число могло у него получиться?

Ответ: 80

Решение:

Любые две точки образуют две дуги. Все вписанные углы, опирающиеся на одну дугу, равны. Для двух соседних точек на одной из двух дуг между ними ни одна другая точка не лежит, то есть пара соседних точек даёт нам одно возможное значение угла, а пара несоседних точек — два значения.

Всего у нас 45 пар точек, из них 35 пар несоседних. Получаем ответ $35 \cdot 2 + 10 = 80$.

Пример, очевидно, существует. Достаточно взять длины дуг между соседними точками, которые относятся как $1 : 2 : 4 : 8 \ldots$.

Задача 3. (3 балла)

Пусть $f(x)$ — квадратный трёхчлен с целыми коэффициентами. При этом $f(\sqrt{3})-f(\sqrt{2})=4$. Найдите $f(\sqrt{10})-f(\sqrt{7})$.

Ответ: 12

Решение:

Пусть $f(x)=cx^2+dx+e$. Тогда $f(\sqrt{3})-f(\sqrt{2})=3c+\sqrt{3}d+e-(2c+\sqrt{2}d+e)=c+d(\sqrt{3}-\sqrt{2})$. Это число может быть целым только при $d=0$. Значит, $f(x)=cx^2+e$ и $f(\sqrt{3})-f(\sqrt{2})=c$.

Тогда $f(\sqrt{10})-f(\sqrt{7})=10c+e-(7c+e)=3c=12$.

Задача 4. (3 балла)

Докажите, что уравнение $15^x+29^y+43^z=t^2$ не имеет решений в натуральных числах.

Решение:

Давайте заметим, что все числа в левой части условия дают остаток 1 при делении на 7. Значит, t^2 даёт остаток 3 при делении на 7. Перебором всех возможных остатков легко убедиться, что такого не бывает.

Задача 5. (3 балла)

В треугольнике ABC отмечены середины сторон $AB=40$ и $BC=26$ — точки K и L соответственно. Оказалось, что четырёхугольник $AKLC$ — описанный. Найдите площадь треугольника ABC.

Ответ: 264

Решение:

По теореме о средней линии, $KL=\frac{1}{2}AC$. В описанном четырёхугольнике суммы противоположных сторон равны, то есть $KL+AC=AK+CL=\dfrac{AB+BC}{2}$, то есть $\dfrac{3AC}{2}=\dfrac{66}{2}$ и $AC=22$. Зная стороны треугольника, можно вычислить площадь по формуле Герона.

Задача 6. (3 балла)

Положительные числа x, y, z таковы, что $xy+yz+xz=12$.

Найдите наименьшее возможное значение $x+y+z$.

Ответ: 6

Решение:

Сложив неравенства $x^2+y^2\geqslant 2xy$, $x^2+z^2\geqslant 2xz$ и $y^2+z^2\geqslant 2yz$ и разделив на 2, мы получаем $x^2+y^2+z^2\geqslant xy+yz+xz$.

$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+xz)\geqslant 3(xy+yz+xz)=36$, откуда $x+y+z\geqslant 6$. Равенство достигается при $x=y=z=2$.

Задача 7. (3 балла)

Из точки K на стороне AC треугольника ABC опустили перпендикуляры KL_1 и KM_1 на стороны AB и BC соответственно. Из точки L_1 опустили перпендикуляр L_1L_2 на BC, а из точки M_1 — перпендикуляр M_1M_2 на AB.

Оказалось, что треугольники BL_1M_1 и BL_2M_2 подобны (точка L_1 в первом треугольнике соответствует точке M_2 во втором). Кроме того, $BL_2=6$ и $L_2M_1=4$. Найдите L_1L_2.

Ответ: 8

Решение:

Заметим, что четырёхугольник $L_1M_2L_2M_1$ является вписанным, так как $\angle L_1M_2M_1=\angle L_1L_2M_1=90^\circ$. Поэтому $\angle BM_2L_2=180^\circ-\angle L_1M_2L_2=\angle L_2M_1L_1=\angle BM_1L_1$. Аналогично $\angle BL_2M_2=\angle BL_1M_1$, поэтому треугольники BL_1M_1 и BL_2M_2 подобны, причём точка L_1 в первом треугольнике соответствует точке L_2 во втором. Однако в условии написано, что они подобны и другим образом, значит, эти два треугольника равнобедренные. Отсюда получаем, что $BL_1=BM_1=BL_2+L_2M_1$ и, по теореме Пифагора, находим $L_1L_2=\sqrt{BL_1^2-BL_2^2}=\sqrt{(BL_2+L_2M_1)^2-BL_2^2}$.

Задача 8. (5 баллов)

Можно ли в прямоугольной таблице 6×8 расставить натуральные числа от 1 до 48 (каждое — по одному разу) так, чтобы в каждом прямоугольнике 1×3 (вертикальном или горизонтальном) сумма чисел была чётной?

Ответ: Да

Решение:

Для того, чтобы придумать пример, заметим сначала следующее: числа в клетках, между которыми по горизонтали или вертикали ровно две клетки, должны быть одной чётности, так как вместе с числами, записанными в двух промежуточных клетках, они должны давать в сумме чётное число. Таким образом, в каждой строке и каждом столбце остатки чисел при делении на два повторяются с периодом три.

Выделим в левом верхнем углу нашей таблицы прямоугольник 3×3 и в каждой его клетке мы отметим, сколько чисел обязаны иметь такой же остаток согласно предыдущему рассуждению.

6	6	4	...
6	6	4	...
6	6	4	...
...	...	...	...

Поскольку от 1 до 48 чётных и нечётных чисел по 24, нам нужно разбить полученные в таблице числа на две группы с общей суммой 24 каждая. При этом в каждом столбце и каждой строке нашей таблицы 3×3 должно быть либо 2 нечётных остатка, либо ни одного. Исходя из этих соображений, выделим жёлтым клетки, соответствующие нечётным числам.

Соответственно, строится и пример (мы не будем писать сами числа, укажем только их чётность):

н	н	ч	н	н	ч	н	н
н	н	ч	н	н	ч	н	н
ч	ч	ч	ч	ч	ч	ч	ч
н	н	ч	н	н	ч	н	н
н	н	ч	н	н	ч	н	н
ч	ч	ч	ч	ч	ч	ч	ч