1.1.4 Задания для 8 класса

Ниже приведен один из вариантов заданий.

Задача 1. (2 балла)

Петя придумал приведённое квадратное уравнение x^2+px+q, корнями которого являются числа x_1 и x_2. Он сообщил Васе три из четырёх чисел p, q, x_1, x_2, не указав, где какое. Это оказались числа 1, 2, -6. Каким было четвёртое число?

Ответ: -3

Решение:

Заметим, что по теореме Виета $x_1+x_2+p=0$. Однако среди трёх сообщённых чисел нет трёх, которые в сумме дают 0. Значит, четвёртое число должно давать 0 в сумме с какими-то двумя из имеющихся, то есть это либо -3, либо 5, либо 4.

Кроме того, должно выполняться условие $q=x_1x_2$, где q — это число, не входящее в нулевую сумму. Проверив все возможные комбинации, можно убедиться, что подходит только $-6=(-3)\cdot 2$.

Задача 2. (2 балла)

Докажите, что уравнение $16^x+21^y+26^z=t^2$ не имеет решений в натуральных числах.

Решение :

Давайте заметим, что все числа в левой части условия дают остаток 1 при делении на 5. Значит, t^2 даёт остаток 3 при делении на 5. Перебором всех возможных остатков легко убедиться, что такого не бывает.

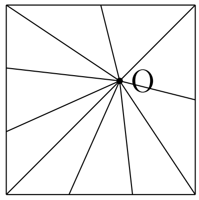
Вместо остатков от деления на 5 можно рассмотреть последние цифры: левая часть всегда заканчивается на 3, а квадрат на 3 заканчиваться не может.

Задача 3. (3 балла)

Можно ли разбить квадрат на 14 равновеликих треугольников, с общей вершиной O и остальными вершинами на границе квадрата?

Ответ: Да

Решение:



Разместим точку O внутри квадрата так, чтобы расстояния от неё до левой и правой сторон относились как $3:2$, как и расстояния до нижней и до верхней сторон. При этом левую и нижнюю сторону разделим на три равные части, а верхнюю и правую — на две. Таким образом, у треугольников с основаниями на левой и нижней сторонах основание будет в полтора раза меньше, а высота в полтора раза больше, чем у треугольников с основаниями на правой и верхней сторонах, а значит, площади всех треугольников будут равны.

Задача 4. (3 балла)

По круговой трассе с равными постоянными скоростями движутся три бегуна. Когда два бегуна встречают друг друга, они мгновенно разворачиваются и начинают бежать в противоположные стороны.

В какой-то момент первый бегун встретился со вторым. Через 20 минут второй бегун впервые встретился с третьим. Ещё через полчаса третий бегун впервые встретился с первым.

За сколько минут один бегун пробегает всю трассу?

Ответ: 100

Решение: (в общем виде)

Пусть первый бегун встретился со вторым, потом через a минут второй бегун впервые встретился с третьим, а ещё через b минут третий бегун впервые встретился с первым.

Пусть первый и второй бегуны встретились в точке A, второй и третий — в точке B, первый и третий — в точке C. Кроме того, пусть в момент встречи второго и третьего бегуна первый находился в точке D.

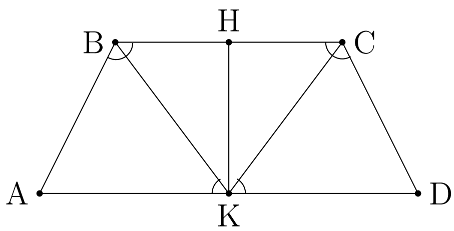
Тогда точки расположены на окружности в таком порядке: D, A, B, C, причём между D и A первый бегун бежал a минут, между A и B второй бегун бежал a минут, между B и C третий бегун бежал b минут и между D и C первый бегун бежал также b минут. Все эти четыре участка вместе образуют всю трассу, значит, она пробегается за $2a+2b$ минут.

Задача 5. (3 балла)

В равнобедренной трапеции $ABCD$ биссектрисы углов B и C пересекаются на основании AD. $AB=50$, $BC=128$. Найдите площадь трапеции.

Ответ: 5472

Решение:



Пусть K — точка пересечения биссектрис. Углы $\angle B=\angle C$ как углы при основании равнобедренной трапеции, значит, равны и их половины, то есть $\angle KBA=\angle KBC=\angle KCB=\angle KCD$. Кроме того, $\angle KBC=\angle AKB$ и $\angle KCB=\angle DKC$ как накрест лежащие.

Значит, треугольники AKB и KCD равнобедренные и $AD=AK+KD=AB+CD=2AB$.

Кроме того, треугольники AKB и KBC подобны, значит, $BK^2=AB\cdot BC$. Вычислим по теореме Пифагора высоту равнобедренного треугольника KBC:

$$KH^2=BK^2-BH^2=AB\cdot BC-\frac{BC^2}{4},$$

откуда площадь трапеции равна $\frac{1}{2}(2AB+BC)\sqrt{AB\cdot BC-\frac{BC^2}{4}}$.

Задача 6. (3 балла)

Натуральные числа x, y, z таковы, что НОД(НОК$(x,y),z)\cdot$ НОК(НОД$(x,y),z) = 1400$.

Какое наибольшее значение может принимать НОД(НОК$(x,y),z)$?

Ответ: 10

Решение:

Заметим, что НОК(НОД$(x,y),z)$ делится на z, а z делится на НОД(НОК$(x,y),z)$, поэтому НОК(НОД$(x$ делится на НОД(НОК$(x,y),z)$.

$1400=2^3\cdot 5^2\cdot 7$ и во второй множитель каждое простое число входит в степени не меньшей, чем в первый. Поэтому максимальное возможное значение НОД(НОК$(x,y),z)$ равно $2\cdot 5=10$. Это значение достигается при $x=y=10$, $z=140$.

Задача 7. (3 балла)

На острове живут вегетарианцы, которые всегда говорят правду, и каннибалы, которые всегда лгут. 50 жителей острова, среди которых есть как женщины, так и мужчины, собрались у костра. Каждый из них произнёс либо "Все мужчины у этого костра — каннибалы", либо "Все женщины у этого костра — вегетарианки", причём обе фразы прозвучали. Какое наибольшее число вегетарианок могло быть у костра?

Ответ: 48

Решение:

Докажем, что если у нас n человек, максимальное количество вегетарианок равно $n-2$.

Во-первых, заметим, что если кто-то назвал кого-то каннибалом, то хотя бы один каннибал у нас точно есть.

Во-вторых, по условию точно есть хотя бы один мужчина. Значит, единственный случай, когда у нас может быть $n-1$ вегетарианок, это случай, в котором оставшийся человек — мужчина-каннибал. Но тогда он не может произнести ни одну из двух фраз из условия. Значит, этот случай невозможен и кроме вегетарианок должно быть хотя бы ещё два человека.

Если у нас $n-2$ вегетарианки, кроме них могут быть либо два мужчины (каннибал и вегетарианец) либо два каннибала (мужчина и женщина).

Задача 8. (5 баллов)

Можно ли в прямоугольной таблице 8×8 расставить натуральные числа от 1 до 64 (каждое — по одному разу) так, чтобы в каждом прямоугольнике 1×3 (вертикальном или горизонтальном) сумма чисел была чётной?

Ответ: Нет

Решение:

Заметим сначала следующее: числа в клетках, между которыми по горизонтали или вертикали ровно две клетки, должны быть одной чётности, так как вместе с числами, записанными в двух промежуточных клетках, они должны давать в сумме чётное число. Таким образом, в каждой строке и каждом столбце остатки чисел при делении на два повторяются с периодом три.

Выделим в левом верхнем углу нашей таблицы прямоугольник 3×3 и в каждой его клетке мы отметим, сколько чисел обязаны иметь такой же остаток согласно предыдущему рассуждению.

9	9	6	...
9	9	6	...
6	6	4	...
...	...	...	...

Поскольку от 1 до 64 чётных и нечётных чисел по 32, нам необходимо разбить получившиеся в таблице 3×3 числа на две группы с суммой по 32 в каждой. Однако это сделать невозможно, так как все числа, кроме одного, делятся на 3, значит, при любом разбиении их на две группы одна из сумм будет делиться на 3 и не сможет стать равна 32.