1.1.5 Задания для 5-7 классов

Ниже приведен один из вариантов заданий.

Задача 1. (2 балла)

Докажите, что ребус КУСЬ + УКСЬ = УКСУС не имеет решений. (В ребусе одинаковые цифры обозначены одинаковыми буквами, разные — разными).

Решение:

Когда мы складываем два четырёхзначных числа и получаем пятизначное, это пятизначное обязательно начинается на 1, поэтому У — это 1. С другой стороны, у чисел КУСЬ и УКСУС разряды сотен совпадают, а значит, УКСЬ больше 900. Противоречие.

Задача 2. (3 балла)

В некоторой фирме 20% самых полезных сотрудников выполняют 80% работы. Какой наименьший процент работы могут выполнять 40% самых полезных сотрудников?

Более полезным мы будем называть сотрудника, выполняющего больше работы.

Ответ: 85%

Решение:

40% самых полезных сотрудников делятся на 20%, которые выполняют 80% работы, и следующие 20%, которые входят в 80%, выполняющих оставшиеся 20%. Эти вторые 20% составляют четверть от 80%. Поскольку среди этих 80% они являются самыми полезными, они выполняют не менее четверти от работы этих 80%, то есть не менее $20\% : 4 = 5\%$ от всей работы.

Значит, 40% самых полезных сотрудников выполняют не менее 85% всей работы. Равенство достигается, когда 80% наименее полезных сотрудников работают одинаково.

Задача 3. (3 балла)

В ряд стоят 30 человек, каждый из них — либо рыцарь, всегда говорящий правду, либо лжец, который всегда лжёт. Их пронумеровали слева направо, после чего каждый человек с нечётным номером сказал: “Все люди с большими, чем у меня, номерами — лжецы”, а каждый человек с чётным номером произнёс: “Все люди с меньшими, чем у меня, номерами — лжецы”.

Сколько могло быть лжецов? Если правильных ответов несколько, перечислите их в порядке возрастания через точку с запятой.

Ответ: 28

Решение:

Докажем, что при данных условиях рыцарей обязательно двое, а все остальные — лжецы.

Рассмотрим людей с нечётными номерами. Если человек с нечетным номером n говорит правду, то человек с нечётным номером $n+2$ также должен говорить правду, поскольку все люди с номерами, большими, чем у него, лжецы. С другой стороны, если человек с номером n говорит правду, человек с номером $n+2$, согласно его словам, также лжец. Получаем противоречие. Это значит, что единственный человек с нечётным номером, который может говорить правду — человек с самым большим нечётным номером, то есть предпоследний.

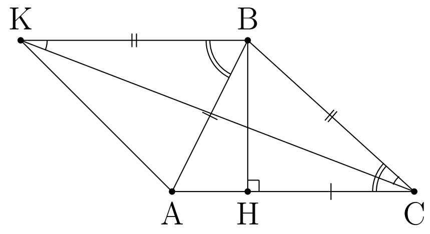
Аналогично доказывается, что единственный человек с чётным номером, который может быть рыцарем — человек номер 2.

При этом, поскольку первый и последний уже точно лжецы, второй и предпоследний говорят правду.

Задача 4. (3 балла)

В остроугольном треугольнике ABC проведена высота BH. Оказалось, что $AB = CH$. Точка K такова, что $\angle BKC = \angle BCK$ и $\angle ABK = \angle ACB$. Докажите, что $AK \perp AB$.

Решение:



Поскольку $\angle BKC = \angle BCK$, треугольник BCK равнобедренный и $BK = CB$. Кроме того, $\angle ABK = \angle ACB = \angle HCB$ и $AB = HC$, поэтому треугольники ABK и HCB равны, откуда $\angle BAK = \angle CHB = 90°$, что эквивалентно утверждению задачи.

Задача 5. (3 балла)

Можно ли в прямоугольной таблице 6×7 (6 строк и 7 столбцов) расставить натуральные числа от 1 до 42 (каждое — по одному разу) так, чтобы в каждом вертикальном прямоугольнике 1×2 сумма чисел была чётной?

Ответ : Нет

Решение:

Предположим, что у нас получилось расставить числа.

Поскольку в любом вертикальном прямоугольнике сумма чисел чётна, числа, находящиеся в этом прямоугольнике, должны быть одной чётности. Но это значит, что все числа в одном столбце одной чётности.

Таким образом, у нас есть столбцы, полностью состоящие из чётных чисел, и столбцы, полностью состоящие из нечётных чисел. Поскольку чётных и нечётных чисел должно быть поровну, столбцов с чётными и нечётными числами также должно быть поровну. Но это невозможно, так как всего столбцов нечётное число.

Задача 6. (3 балла)

По круговой трассе с равными постоянными скоростями движутся три бегуна. Когда два бегуна встречают друг друга, они мгновенно разворачиваются и начинают бежать в противоположные стороны.

В какой-то момент первый бегун встретился со вторым. Через 15 минут второй бегун впервые встретился с третьим. Ещё через 25 минут третий бегун впервые встретился с первым.

За сколько минут один бегун пробегает всю трассу?

Ответ : 80

Решение:

Пусть первый бегун встретился со вторым, потом через a минут второй бегун впервые встретился с третьим, а ещё через b минут третий бегун впервые встретился с первым.

Пусть первый и второй бегуны встретились в точке A, второй и третий — в точке B, первый и третий — в точке C. Кроме того, пусть в момент встречи второго и третьего бегуна первый находился в точке D.

Тогда точки расположены на окружности в таком порядке: D, A, B, C, причём между D и A первый бегун бежал a минут, между A и B второй бегун бежал a минут, между B и C третий бегун бежал b минут и между D и C первый бегун бежал также b минут. Все эти четыре участка вместе образуют всю трассу, значит, она пробегается за $2a + 2b$ минут.

Задача 7. (4 балла)

Натуральные числа a, b, c таковы, что $\text{НОД}(\text{НОК}(a, b), c) \cdot \text{НОК}(\text{НОД}(a, b), c) = 200$.

Какое наибольшее значение может принимать $\text{НОД}(\text{НОК}(a, b), c)$?

Ответ: 10

Решение:

Заметим, что $\text{НОК}(\text{НОД}(x, y), z)$ делится на z, а z делится на $\text{НОД}(\text{НОК}(x, y), z)$, поэтому $\text{НОК}(\text{НОД}(x$ делится на $\text{НОД}(\text{НОК}(x, y), z)$.

$200 = 2^3 \cdot 5^2$ и во второй множитель каждое простое число входит в степени не меньшей, чем в первый. Поэтому максимальное возможное значение НОД(НОК$(x, y), z)$ равно $2 \cdot 5 = 10$. Это значение достигается при $x = y = 10$, $z = 20$.

Задача 8. (5 баллов)

У Васи было 100 отрезков, ни из каких трёх нельзя было составить треугольник. Он сделал себе ещё один отрезок и теперь может составить треугольник несколькими способами. Какое наибольшее количество способов у него может быть?

Ответ: 100

Решение:

Докажем, что если в начале у Васи было n отрезков (где $n \geqslant 6$), то после добавления нового отрезка он сможет составить ровно n треугольников.

В ходе решения будем пользоваться неравенством треугольника, которое гласит, что треугольник из отрезков можно составить тогда и только тогда, когда длина большего отрезка меньше суммы двух оставшихся.

Обозначим длины наших отрезков за $a_1 \leqslant \ldots a_k \leqslant b \leqslant c \leqslant d \leqslant e_1 \leqslant e_m$, где c — длина добавленного отрезка (каких-то отрезков a_i, b, d, e_i при этом может не быть).

Треугольник, составленный из отрезков x, y, z, будем обозначать (x, y, z).

(1) Пусть Вася смог получить треугольник, где c — наименьшая сторона. Допустим, это треугольник $(c, e_i, e_j$, где $j > i$. Это означает, что выполняется неравенство треугольника: $e_i + c > e_j$. Но $e_i + d \geqslant e_i + c > e_j$, поэтому треугольник (d, e_i, e_j) тоже можно составить, что противоречит условию задачи.

Аналогично, если Вася смог получить треугольник (c, d, e_i) где $i > 1$, это значит, что он может получить и треугольник d, e_1, e_i, что противоречит условию задачи. Значит, единственный возможный треугольник, в котором c — наименьшая сторона — это треугольник (c, d, e_1).

(2) Пусть Вася смог получить треугольник, где c — наибольшая сторона. Допустим, это треугольник (a_i, a_j, c). Поскольку $b \leqslant c < a_i + a_j$, это значит, что треугольник (a_i, a_j, b) тоже можно составить, что противоречит условию задачи.

Значит, треугольники, в которых c наибольшая сторона, могут быть только вида (a_i, b, c).

(3) Пусть Вася смог получить треугольник, где c — наибольшая сторона. Допустим, это треугольник (a_i, c, e_i). Но $a_i + d \geqslant a_i + c > e_i$, поэтому треугольник (a_i, d, e_i) тоже можно составить, что противоречит условию задачи.

Если вместо a_i подставить b, предыдущее рассуждение останется верным, значит, вариант b, c, e_i тоже невозможен.

Остаются возможные треугольники вида (a_i, c, d) и (b, c, d)

(4) Таким образом, мы перебрали все варианты и обнаружили, что у нас могут быть только 4 вида треугольников: (c, d, e_1), (a_i, b, c), (a_i, c, d) и (b, c, d).

Пусть теперь Вася может составить одновременно треугольники (a_{k-2}, b, c) и (a_{k-1}, c, d).

Это значит, что выполняются неравенства треугольника $a_{k-2} + b > c$ и $a_{k-1} + c > d$, которые можно переписать как $c - b < a_{k-2}$ и $d - c < a_{k-1}$. Но это значит, что $d - b = (d - c) + (c - b) < a_{k-1} + a_{k-2} < a_k$ (последнее неравенство следует из того, что не существует треугольника (a_{k-2}, a_{k-1}, a_k)).

Перепишем неравенство $d - b < a_k$ как $d < b + a_k$ и получим неравенство треугольника для (a_k, b, d), которое на самом деле должно нарушаться, так как такой треугольник составить нельзя.

Поэтому составить одновременно треугольники (a_{k-2}, b, c) и (a_{k-1}, c, d) невозможно.

Аналогично невозможно составить одновременно треугольники (a_{k-1}, b, c) и (a_{k-2}, c, d). При этом, если мы не можем составить эти треугольники с a_{k-1} или a_{k-2}, значит, мы не можем составить их и с меньшими a_i.

Из 4 треугольников (a_{k-2}, b, c), (a_{k-1}, c, d), (a_{k-1}, b, c) и (a_{k-2}, c, d) можно составить максимум два: либо (a_{k-1}, c, d) и (a_{k-1}, b, c), либо (a_{k-1}, c, d) и (a_{k-2}, c, d), либо (a_{k-1}, b, c) и (a_{k-2}, b, c)

Но в первом случае невозможны (a_{k-2}, b, c) и (a_{k-2}, c, d) и все треугольники с меньшими a_i, то есть мы оставляем себе только 6 возможных треугольников: (c, d, e_1), (a_k, b, c), (a_k, c, d),(a_{k-1}, b, c), (a_{k-1}, c, d) и (b, c, d), что при достаточно больших n нам не интересно.

Во втором и третьем случаях либо треугольник вида (a_i, b, c), либо треугольник (a_i, c, d) можно составить только при $i = k$. То есть остаются возможные треугольники либо (c, d, e_1), (a_k, b, c), (b, c, d) и k треугольников вида (a_i, c, d), либо (c, d, e_1), (a_k, c, d), (b, c, d) и k треугольников вида (a_i, b, c). В любом случае, это максимум $k + 3 \leqslant n$ треугольников при $k \leqslant n - 3$, $k + 2 = n$ треугольников, если $k = n - 2$ (в этом случае не существует e_1) или k треугольников при $k = n - 1$ (в этом случае не существует отрезка d и построенных с его помощью треугольников).

Итак, мы доказали, что больше, чем n треугольников быть не может.

Осталось привести пример: $k = n - 2$, $a_1 = 2$,$\ldots$ $a_i = 2^i$, $\ldots$ $a_k = 2^k$, $b = 2^{k+1}$, $c = b + 1 = 2^{k+1} + 1$, $d = b + a_k = 2^{k+1} + 2^k$. Легко проверить, что в этом случае существуют только треугольники (a_k, c, d), (b, c, d) и $k = n - 2$ треугольников вида (a_i, b, c).