1 Открытая олимпиада школьников 2020/2021 уч. год

1.1 Задания с решениями заключительного этапа олимпиады

1.1.1 Задания для 11 класса

Ниже приведен один из вариантов заданий.

Задача 1. (2 балла)

Кубический многочлен имеет три корня. Наибольшее его значение на отрезке $[4;9]$ достигается при $x=5$, а наименьшее при $x=7$. Найдите сумму корней многочлена.

Ответ: 18

Решение:

Поскольку в условиях всех вариантов минимум и максимум на отрезке достигаются не в его концах, они достигаются в корнях производной многочлена. Пусть многочлен имеет вид ax^3+bx^2+cx+d, а его производная, соответственно, $3ax^2+2bx+c$. В таком случае сумма корней многочлена равна $\frac{-b}{a}$, а сумма корней производной $\frac{-2b}{3a}$, то есть составляет $\frac{2}{3}$ от суммы корней многочлена.

Значит, сумма корней многочлена составляет $\frac{3}{2}(x_1+x_2)$.

x_0	4
x_1	5
x_2	7
x_3	9
Ответ	18

Задача 2. (3 балла)

Найдите сумму натуральных чисел от 1 до 3000 включительно, имеющих с числом 3000 общие делители, большие 1.

Ответ: 3301500

Решение:

$3000=2^3\cdot 3\cdot 5^3$, то есть нас интересуют числа, деляющиеся на 2, 3 или 5. Найдём сначала количество таких чисел. Для этого воспользуемся принципом включений и исключений. Чётных чисел от 1 до 3000 ровно $\frac{3000}{2}=1500$, кратных трём — $\frac{3000}{3}=1000$, кратных пяти — $\frac{3000}{5}=600$. Однако, если просто сложить числа 1500, 1000 и 600, мы посчитаем некоторые числа 2 раза, а именно, числа, делящиеся на $2\cdot 3=6$, $2\cdot 5=10$ и $3\cdot 5=15$, поэтому из полученной суммы надо вычесть $\frac{3000}{6}=500$, $\frac{3000}{10}=300$ и $\frac{3000}{15}=200$. Однако, $1500+1000+600-500-300-200=2100$ всё ещё неправильный ответ, поскольку в этом выражение числа, имеющие все три простых множителя, сначала считаются три раза, а потом их количество вычитается опять же три раза, поэтому надо снова добавить эти числа. Количество таких чисел — $\frac{3000}{2\cdot 3\cdot 5}=100$, значит, количество чисел, имеющих с 3000 общие делители и не превосходящих его, это 2200.

Заметим теперь, что если какое-то число x имеет с числом N общие делители, то число $N-x$ тоже имеет с N те же самые общие делители. Значит, все интересующие нас числа, кроме чисел 1500 и 3000, разбиваются на пары с суммой 3000 (числу 3000 в пару пришлось бы сопоставить 0, а числу 1500 — само себя). Таких пар получаается 1099, поэтому итоговый ответ $1099\cdot 3000+3000+1500=1100\cdot 3000+1500=3301500$.

Замечание: числа, меньшие 3000 и взаимно простые с ним разбиваются на пары таким же образом, поэтому участники, знакомые с функцией Эйлера, могли получить формулу для ответа в виде $\frac{N(N+1)-N\cdot\varphi(N)}{2}$.

Задача 3. (3 балла)

Палиндром — это слово, которое не меняется, если в нём переставить буквы в обратном порядке, например *abcba*. Сколько различных 11-буквенных слов можно составить из букв a, b, c, d, e так, чтобы они не содержали палиндромов длины больше 1?

Ответ: 393660

Решение:

Заметим, что две центральные буквы любого палиндрома чётной длины одинаковы, то есть образуют палиндром длины два. Точно так же три центральные буквы палиндрома нечётной длины образуют палиндромы длины три. Таким образом, отсутствие в слове палиндромов равносильно отсутствию палиндромов длины 2 и 3. Это, в свою очередь, равносильно тому, что любые три подряд идущие буквы в слове различны.

Первая буква в слове выбирается k способами, для следующей остаётся $k-1$ способ. Каждая из последующих букв не может совпадать с двумя предыдущими, поэтому для неё остаётся $k-2$ спрособов. Все эти числа надо перемножить, поэтому мы получаем формулу $k(k-1)(k-2)^{n-2}$.

n	11
k	5
Формула	$5 \cdot 4 \cdot 3^9$
Ответ	393600

Задача 4. (3 балла)

Положительные числа x, y и z таковы, что $xyz = 8$ и $x \leqslant z$. Докажите неравенство $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{6} \geqslant \frac{2x}{z}$

Решение:

Заметим, что сумма коэффициентов в левой части равна единице. Применим неравенство для среднего арифметического и среднего геометрического для чисел x, x, x, y, y, z:

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{6} \geqslant \sqrt[6]{x^3y^2z} = \sqrt[6]{x^2y^2z^2 \cdot \frac{x}{z}} = 2\sqrt[6]{\frac{x}{z}}$$

.

Поскольку $x \leqslant z$, $\frac{x}{z} < 1$ и, следовательно, $\sqrt[6]{\frac{x}{z}} \geqslant \frac{x}{z}$.

Задача 5. (3 балла)

Вася выбрал четыре числа и для каждой пары вычислил логарифм большего по основанию меньшего. Получилось шесть логарифмов. Четыре из них равны 15, 20, 21 и 28. Какие значения может принимать наибольший из всех шести логарифмов?

Ответ: 28;420

Решение:

Пусть четыре исходные числа — это $x \leqslant y \leqslant z \leqslant t$. Обозначим $a = \log_x y$, $b = \log_y z$, $c = \log_z t$. Тогда $\log_x z = ab$, $\log_y t = bc$, $\log_x t = abc$, то есть наши шесть логарифмов равны a, b, c, ab, bc и abc. Наибольший из них при этом abc и именно его нам надо найти.

Заметим, что среди наших четырёх логарифмов ни один не является произведением двух других. Это значит, что в каждой тройке (a, b, ab), (b, c, bc), (a, bc, abc), (ab, c, abc) отсутствует хотя бы одно число. Каждое из шести чисел встречается ровно в двух из этих троек, значит, чтобы "разрушить" все тройки, надо удалить два числа, которые вместе в одной тройке не встречаются, то есть, числа, которых мы не знаем, это либо a и c, либо b и abc, либо bc и ab.

Соответственно, у нас есть одна из четвёрок (b, ab, bc, abc), (a, c, ab, bc) и (a, b, c, abc). Третий вариант невозможен, потому что ни одно из наших четырёх чисел не является произведением трёх других. Для того, чтобы четверёка чисел могла соответствовать первому или второму вариантам, необходимо и достаточно, чтобы произведение двух чисел было равно произведению двух оставшихся. Это условие выполняется: $15 \cdot 28 = 20 \cdot 21$.

В первом случае мы имеем $b \cdot abc = ab \cdot bc$, и abc — это наибольшее из наших четырёх чисел. Во втором случае $a \cdot bc = b \cdot ac$ и abc — это как раз искомое произведение. Значит, мы имеем два возможных ответа: 28 и 420.

Задача 6. (4 балла)

Четырёхугольник $ABCD$ описан вокруг окружности с центром в точке O. K, L, M, N — точки касания сторон AB, BC, CD и AD соответственно, KP, LQ, MR и NS — высоты в треугольниках OKB, OLC, OMD, ONA. $OP = 15$, $OA = 32$, $OB = 64$.

Найдите длину отрезка QR.

Ответ: 30

Решение:

Треугольники OKA и ONA — прямоугольные с общей гипотенузой и катетом, равным радиусу окружности, поэтому они равны. Значит, их высоты падают в одну точку общей гипотенузы, то есть KS — высота в треугольнике OKA. Поэтому точки S и P лежат на окружности с диаметром OK. Аналогично точки R и S лежат на окружности с диаметром ON. Поскольку диаметры этих окружностей равны, градусные меры дуги OS в этих окружностях совпадают. В первой окружности на эту дугу опирается $\angle OPS$, а во второй — $\angle ORS$, значит, эти углы равны. (Именно равны, а не дополняют друг друга до $180°$, потому что точки P и R лежат по разные стороны от прямой OS, а окружности симметричны относительно неё).

Аналогично $\angle OPQ = \angle ORQ$. Сложив это с предыдущим равенством, получим $\angle SPQ = \angle SRQ$. Аналогично $\angle PSR = \angle PQR$, то есть четырёхугольник $PRQS$ — параллелограмм. Значит, вместо длины отрезка QR мы можем найти длину отрезка PS.

(Для участников, знакомых с понятием инверсии: можно понять, что вершины четырёхугольника $PQRS$ инверсны вершинам четырёхугольника $ABCD$ относительно нашей окружности, то есть мы только что повторили доказателсьство теоремы о том, что четырёхугольник, инверсный описанному, является параллелограммом).

По свойству высоты прямоугольного треугольника, $OK^2 = OS \cdot OA$. Аналогично $OK^2 = OP \cdot OB$, откуда $\dfrac{OS}{OB} = \dfrac{OP}{OA} = k$. Кроме того, угол $\angle O$ в треугольниках OBA и OSP общий, поэтому они подобны с коэффициентом k. Значит, $PS = k \cdot AB = k(AK + KB) = k(\sqrt{OA^2 - OK^2} + \sqrt{OB^2 - OK^2}) = \dfrac{OP}{OA}(\sqrt{OA^2 - OB \cdot OP} + \sqrt{OB^2 - OB \cdot OP}) = 30$.

Задача 7. (4 балла)

Два куба с ребром $12\sqrt[4]{\dfrac{8}{11}}$ имеют общую грань. Сечение одного из этих кубов некоторой плоскостью — треугольник площади 16. Сечение другого той же плоскостью — четырёхугольник. Какое наибольшее значение может принимать его площадь?

Ответ: 128

Решение:

Пусть наши кубы — это $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и $ABCDA_2B_2C_2D_2$ с общей гранью $ABCD$. Пусть также треугольное сечение первого куба — это KLM, где точка K лежит на AA_1, точка L на AB, а точка M — на AD. Одна из сторон четырёхугольного сечения второго куба — отрезок LM. Две другие — продолжения отрезков KL и KM на грани второго куба, назовём эти отрезки LP и MQ. Чтобы сечение было четырёхугольным, точки P и Q должны находиться на одной грани второго куба, а это может быть только грань $A_2B_2C_2D_2$.

Значит, четырёхугольное сечение второго куба — это трапеция $LMQP$. Нахождение её наибольшей площади равносильно нахождение наибольшей площади треугольника KPQ, который подобен треугольнику KLM. Обозначим этот коэффициент подобия $k = \dfrac{KP}{KL}$. Тогда $k^2 = \dfrac{S_{KPQ}}{S_{KLM}} = \dfrac{S_{KPQ}}{S}$. То есть наша задача равносильна задаче о нахождении максимального коэффициента подобия.

С другой стороны, по теореме Фалеса $k = \dfrac{KP}{KL} = \dfrac{KA_2}{KA} = \dfrac{KA + AA_2}{KA} = 1 + \dfrac{AA_2}{KA}$. То есть коэффициент подобия тем больше, чем меньше KA, а значит, наша задача — минимизировать KA, или, что то же самое, минимизировать KA_2.

Пусть у нас есть треугольник, вершины которого расположены на трёх рёбрах куба, выходящих из одной точки, на расстояниях x, y и z. Найдём формулу площади этого треугольника. Это можно делать по-разному, например, через векторное произведение, или посчитав двумя способами площадь тетраэдра, образованного вершинами треугольника и вершиной куба, но мы вычислим эту площадь по формуле Герона, зная стороны треугольника: $a = \sqrt{x^2+y^2}$, $b = \sqrt{x^2+z^2}$ и $c = \sqrt{y^2+z^2}$.

$$S = \frac{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(c+(b-a))(c-(b-a))}}{4} = \frac{\sqrt{((a+b)^2-c^2)(c^2-(b-a)^2)}}{4} =$$

$$= \frac{\sqrt{(a^2+b^2+c^2-2ab)(c^2-a^2-b^2+c^2+2ab)}}{4} = \underbrace{\frac{\sqrt{4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2}}{4}}_{\text{Эту формулу тоже иногда называют формулой Герона}} =$$

$$= \frac{\sqrt{4(x^2+y^2)(x^2+z^2)-((x^2+y^2)+(x^2+z^2)-(y^2+z^2))^2}}{4} = \frac{\sqrt{4x^4+4x^2y^2+4x^2z^2+4y^2z^2-(2x^2)^2}}{4} =$$

$$= \frac{\sqrt{x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2}}{2}$$

Посмотрим на эту формулу для треугольника KPQ и отрезков $x = A_2P$, $y = A_2Q$, $z = A_2K$. С одной стороны, нам надо минимизировать z, а с другой — максимизировать площадь. Очевидно, для этого x и y должны быть максимальны, то есть равны ребру ℓ.

Как мы знаем, $k = \dfrac{KA+AA_2}{KA} = \dfrac{KA+\ell}{KA}$, то есть $KA\cdot k = KA+\ell$, откуда $KA = \dfrac{\ell}{k-1}$, $KA_2 = KA+\ell = \dfrac{k\ell}{k-1}$.

Подставляя эти значения в формулу, получаем:

$S_{KPQ} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\ell^4+\ell^2\cdot\left(\dfrac{k\ell}{k-1}\right)^2+\ell^2\cdot\left(\dfrac{k\ell}{k-1}\right)^2} = \dfrac{\ell^2}{2(k-1)}\sqrt{(k-1)^2+2k^2}$.

Соответственно, $S = \dfrac{S_{KPQ}}{k^2} = \dfrac{\ell^2\sqrt{(k-1)^2+2k^2}}{2k^2(k-1)}$, откуда $\dfrac{4S^2}{\ell^4} = \dfrac{(k-1)^2+2k^2}{k^4(k-1)^2} = \dfrac{1}{k^4}+\dfrac{2}{k^2(k-1)^2}$. Правая часть этого равенства убывает при $k>1$, а значит, данное уравнение на k имеет не больше одного решения. Конкретное решение в большинстве вариантов легко подбирается из этого равенства, так как оно целочисленное.

Например, в первом варианте мы получаем уравнение $\dfrac{1}{k^4}+\dfrac{2}{k^2(k-1)^2} = \dfrac{4\cdot 16^2}{12^4\cdot\dfrac{8}{11}} = \dfrac{11}{2\cdot 3^4}$, откуда сразу возникает желание проверить $k=3$, что оказывается верным.

Ответ получается как разность площадей двух треугольников и равен $(k^2-1)S$.

S	16
ℓ	$12\sqrt[4]{\dfrac{8}{11}}$
k	3
Ответ	128

Задача 8. (4 балла)

Гензель и Гретель играют в игру, Гензель ходит первым. Они по очереди ставят фишки на клетчатую доску 7×8 (7 строк и 8 столбцов). Каждый раз, когда Гретель ставит фишку, она получает 4 очка за каждую фишку, уже стоящую в той же строке и 3 очка за каждую фишку, уже стоящую в том же столбце.

На одной клетке может стоять только одна фишка. Игра заканчивается, когда все клетки доски заполнены.

Какое наибольшее количество очков может заработать Гретель вне зависимости от действий Гензеля?

Ответ: 700

Решение:

Давайте скажем, что Гензель тоже получает очки по тому же принципу, что и Гретель. В таком случае, каждая пара клеток в одной строке даст в итоге какому-то из игроков 4 очка, а каждая пара клеток в одном столбце — 3 очка. В одной строке можно найти $\frac{8 \cdot 7}{2} = 28$ пар клеток, а в одном столбце — $\frac{7 \cdot 6}{2} = 21$ пару. Общая сумма очков, набранных обоими игроками в конце игры, будет равна $7 \cdot 28 \cdot 4 + 8 \cdot 21 \cdot 3 = 1288$.

Приведём стратегию за Гретель, позволяющую ей каждый ход получать на 4 очка больше, чем перед этим Гензель. Для этого разобъём каждую строку на 8 прямоугольников 1×2. Как только Гензель ставит фишку в одну из клеток прямоугольника, Гретель тут же занимает вторую. Столбцы, в которых находятся эти клетки, идентичны из-за стратегии Гретель, а в строке к моменту её хода находится на одну фишку больше — ровно на ту, которую поставил Гензель.

С другой стороны, если Гензель будет каждый раз выбирать клетку, которая приносит максимальное количество очков, Гретель своим следующим ходом сможет набрать максимум на 4 очка больше, так как добавлением одной фишки Гензель повышает "ценность" каждой из оставшихся клеток не более, чем на 4.

Каждый игрок сделает 28 ходов и, при правильной игре, Гретель наберёт на 112 очков больше. Зная сумму и разность двух чисел, можно легко найти сами числа, это 700 и 588.

Во всех остальных вариантах второй игрок всегда получает большее количество очков за фишку в ряду, длина которого чётна, поэтому описанная стратегия за второго игрока всегда работает.

1.1.2 Задания для 10 класса

Ниже приведен один из вариантов заданий.

Задача 1. (2 балла)

Пусть $p_1, p_2, \ldots, p_{97}$ — простые числа (не обязательно различные). Какое наибольшее целое значение может принимать выражение

$$\sum_{i=1}^{97} \frac{p_i}{p_i^2+1} = \frac{p_1}{p_1^2+1} + \frac{p_2}{p_2^2+1} + \ldots + \frac{p_{97}}{p_{97}^2+1}?$$

Ответ: 38

Решение: Заметим, что функция $\frac{x}{x^2+1}$ убывает при $x \geqslant 2$, а значит, $\sum\limits_{i=1}^{97} \frac{p_i}{p_i^2+1} \leqslant 97 \cdot \frac{2}{2^2+1} = 97 \cdot 0,4 = 38,8$. Таким образом, ответ не может быть больше, чем 38.

При этом $\frac{3}{3^2+1} = 0,3$, что на $0,1$ меньше значения для $p = 2$. Значит, если в вышеприведённой максимальной сумме заменить восемь двоек на тройки, получится как раз 38.

Задача 2. (2 балла)

Сумма синусов пяти углов из промежутка $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ равна 3. Какие наибольшее и наименьшее целые значения может принимать сумма их косинусов?

Ответ: 2;4

Решение:

Заметим, что $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$. Аргумент синуса принимает значения от $\frac{\pi}{4}$ до $\frac{3\pi}{4}$, значит $\frac{\sqrt{2}}{2} \leqslant \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leqslant 1$. Следовательно, $1 \leqslant \sin x + \cos x \leqslant \sqrt{2}$, а сумма пяти синусов и пяти косинусов