1.1.2 Задания для 10 класса

Ниже приведен один из вариантов заданий.

Задача 1. (2 балла)

Пусть p_1, p_2, …, p_{97} — простые числа (не обязательно различные). Какое наибольшее целое значение может принимать выражение

$$\sum_{i=1}^{97} \frac{p_i}{p_i^2+1} = \frac{p_1}{p_1^2+1} + \frac{p_2}{p_2^2+1} + \ldots + \frac{p_{97}}{p_{97}^2+1}?$$

Ответ: 38

Решение: Заметим, что функция $\dfrac{x}{x^2+1}$ убывает при $x \geqslant 2$, а значит, $\sum\limits_{i=1}^{97} \dfrac{p_i}{p_i^2+1} \leqslant 97 \cdot \dfrac{2}{2^2+1} = 97 \cdot 0,4 = 38,8$. Таким образом, ответ не может быть больше, чем 38.

При этом $\dfrac{3}{3^2+1} = 0,3$, что на $0,1$ меньше значения для $p = 2$. Значит, если в вышеприведённой максимальной сумме заменить восемь двоек на тройки, получится как раз 38.

Задача 2. (2 балла)

Сумма синусов пяти углов из промежутка $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$ равна 3. Какие наибольшее и наименьшее целые значения может принимать сумма их косинусов?

Ответ: 2;4

Решение:

Заметим, что $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$. Аргумент синуса принимает значения от $\frac{\pi}{4}$ до $\frac{3\pi}{4}$, значит $\frac{\sqrt{2}}{2} \leqslant \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leqslant 1$. Следовательно, $1 \leqslant \sin x + \cos x \leqslant \sqrt{2}$, а сумма пяти синусов и пяти косинусов принимает значения от 5 до $5\sqrt{2}$, что чуть больше 7. Вычитая 3, получаем наименьшее и наибольшее возможные целые значения суммы: 2 и 4 соответственно.

Осталось привести примеры: значение 2 достигается, когда три угла принимают значения 0, другие 2 — значение $\frac{\pi}{2}$. Значение 4 достигается, когда все углы имеют синусы, равные $\frac{3}{5}$ и косинусы, равные $\frac{4}{5}$.

Задача 3. (3 балла)

У Миши есть 10 карточек, на каждой написана одна буква. Он может составить из них $7! = 5040$ различных десятибуквенных слов. Сколько у него может быть различных букв на карточках? (Приведите все варианты и докажите, что других нет).

Ответ: 5; 4

Решение: Количество слов, которое может составить Миша, равно $\dfrac{10!}{a!b!\dots}$, где числа a, b, …— количество раз, которое повторяется каждая буква.

$7! = \dfrac{10!}{720}$, то есть, наша задача — представить число 720 в виде факториала или произведения нескольких факториалов, больших 1. $720 = 6!$, это одно из представлений. Кроме того, 720 делится на 5, поэтому остальные Варианты должны включать $5! = 120$. Итак, $720 = 5! \cdot 6 = 5! \cdot 3$. Легко видеть, что других Вариантов представить число 6 в виде произведения факториалов, нет.

Таким образом, мы получаем два Варианта. В одном из них, соответствующем формуле $\dfrac{10!}{6!}$, одна буква повторяется 6 раз, а остальные 4 уникальны, итого 5 букв. В другом Варианте, задаваемом формулой $\dfrac{10!}{5!3!}$, одна буква встречается 5 раз, другая 3 раза, и есть ещё 2 уникальные буквы, всего 4 различные буквы.

Задача 4. (3 балла)

На стороне BC треугольника ABC отмечены точки A_1 и A_2 такие, что $BA_1 = 6$, $A_1A_2 = 8$, $CA_2 = 4$. На стороне AC отмечены точки B_1 и B_2 такие, что $AB_1 = 9$, $CB_2 = 6$. Отрезки AA_1 и BB_1 пересекаются в точке K, а AA_2 и BB_2 — в точке L. Точки K, L и C лежат на одной прямой. Найдите B_1B_2.

Ответ: 12

Решение:

Обозначим за M точку пересечения прямой KL и стороны AB. Запишем две теоремы Чевы, для точки K и для точки L:

$$\frac{AM}{MB} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1; \quad \frac{AM}{MB} \cdot \frac{BA_2}{A_2C} \cdot \frac{CB_2}{B_2A} = 1.$$

Отсюда получаем $\dfrac{BA_1}{A_1C} \cdot \dfrac{CB_1}{B_1A} = \dfrac{BA_2}{A_2C} \cdot \dfrac{CB_2}{B_2A}$. Четыре отрезка в данном равенстве нам известны. $A_1C = A_2C \pm A_1A_2 = A_2C + A_1A_2$, так как $A_1A_2 > A_2C$. Аналогично $BA_2 = BA_1 + A_1A_2$. Для остальных двух отрезков $AB_2 = AB_1 \pm B_1B_2$ и $CB_1 = CB_2 \pm B_1B_2$ (причём знаки $\pm$ одинаковы). Подставляя, получаем

$$\frac{BA_1}{A_2C + A_1A_2} \cdot \frac{CB_2 \pm B_1B_2}{B_1A} = \frac{BA_1 + A_1A_2}{A_2C} \cdot \frac{CB_2}{AB_1 \pm B_1B_2}$$

$$(CB_2 \pm B_1B_2)(AB_1 \pm B_1B_2) = \frac{(BA_1 + A_1A_2)CB_2(A_2C + A_1A_2)B_1A}{A_2C \cdot BA_1}$$

$$(6 \pm B_1B_2)(9 \pm B_1B_2) = \frac{14 \cdot 6 \cdot 12 \cdot 9}{4 \cdot 6} = 378.$$

Так как $378 > 6 \cdot 9$, знаки $\pm$ раскрываются как $+$ и мы получаем квадратное уравнение $B_1B_2^2 + 15B_1B_2 - 324 = 0$. Оно имеет корни 12 и -27, из которых нас интересует положительный.

Задача 5. (3 балла)

$P(x)$ — многочлен четвёртой степени с целыми коэффициентами, старший из которых положительный. При этом $P(\sqrt{3}) = P(\sqrt{5})$. Найдите x, при котором (или при которых) $P(x)$ принимает наименьшее значение.

Ответ: -2;2

Решение:

Пусть $P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$. Тогда $P(\sqrt{3}) = 9a + 3\sqrt{3}b + 3c + \sqrt{3}d + e$, $P(\sqrt{5}) = 25a + 5\sqrt{5}b + 5c + \sqrt{5}d + e$. Числа вида $A + B\sqrt{3}$ и $C + D\sqrt{5}$ при целых A, B, C, D могут быть равны только если $B = D = 0$.

Значит, $3b + d = 5b + d = 0$, откуда $b = d = 0$, то есть $P(x) = ax^4 + cx^2 + e$ и можно сказать, что $P(x) = Q(x^2)$, где $Q(t) = at^2 + ct + d$. При этом $Q(3) = Q(5)$, значит, $Q(t)$ достигает минимума при $t = \dfrac{3+5}{2} = 4$, а $P(x)$ — при $x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$.

Задача 6. (3 балла)

Последовательность задана начальными условиями $x_1 = 1$, $x_2 = 1,5$, $x_3 = 2$ и соотношением $x_n = \dfrac{x_{n-1}}{2} + \dfrac{x_{n-2}}{4} + \dfrac{x_{n-3}}{4}$. Докажите, что x_{1001} и x_{1000} отличаются менее чем на 10^{-300}.

Решение:

$$x_{n+1} - x_n = \frac{x_n}{2} + \frac{x_{n-1}}{4} + \frac{x_{n-2}}{4} - \frac{x_{n-1}}{2} - \frac{x_{n-2}}{4} - \frac{x_{n-3}}{4} = \frac{1}{2}\left(\frac{x_{n-1}}{2} + \frac{x_{n-2}}{4} + \frac{x_{n-3}}{4}\right) - \frac{x_{n-1}}{4} - \frac{x_{n-3}}{4} = \frac{x_{n-2}}{8} - \frac{x_{n-3}}{8}.$$

Таким образом, $x_{1001} - x_{1000} = \dfrac{1}{8}(x_{998} - x997) = \ldots = \dfrac{1}{8^{333}}(x_2 - x_1) = \dfrac{1}{2^{1000}} = 1024^{-100} < 1000^{-100} = 10^{-300}$.

Задача 7. (4 балла)

Точка I — центр вписанной окружности треугольника ABC, точка O — центр вневписанной окружности, касающейся стороны AC, отрезки AC и OI пересекаются в точке K.

Оказалось, что $OI = 50$, $IK = 18$, $AK = 24$. Найдите длину биссектрисы угла B в треугольнике ABC.

Ответ: 576/7

Решение:

Центр вписанной окружности лежит на биссектрисе угла $\angle BAC$, центр вневписанной — на биссектрисе внешнего угла $\angle A$. Эти биссектрисы перпендикулярны, поэтому треугольник AIO прямоугольный с прямым углом в точке A. Заметим, что в условии задачи $AK^2 = IK \cdot OK$. Это равенство в прямоугольном треугольнике выполняется тогда и только тогда, когда AK — высота. Поэтому $AK \perp IO$, то есть $AC \perp IO$, но прямая IO — это биссектриса угла $\angle B$, значит, треугольник ABC равнобедренный ($AB = BC$).

Из прямоугольного треугольника AKI найдём $\operatorname{tg}\angle KAI = \dfrac{IK}{AK}$.

Тогда $\operatorname{tg}\angle BAC = \operatorname{tg} 2\angle KAI = \dfrac{2\operatorname{tg}\angle KAI}{1 - \operatorname{tg}^2\angle KAI} = \dfrac{\dfrac{2IK}{AK}}{1 - \left(\dfrac{IK}{AK}\right)^2} = \dfrac{2 \cdot IK \cdot AK}{AK^2 - IK^2}$

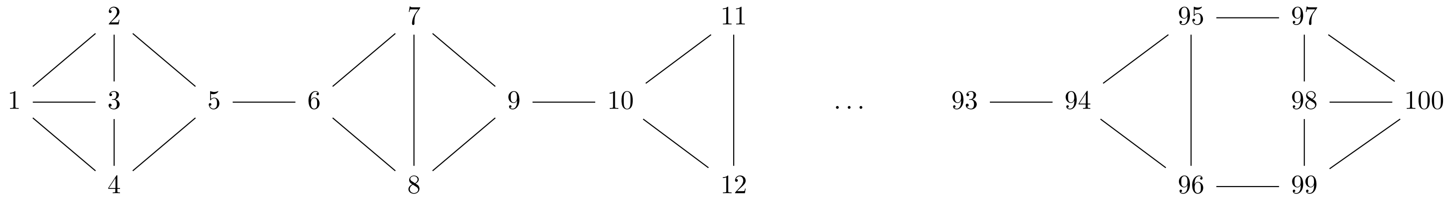
Искомая длина биссектрисы — это $BK = AK \cdot \operatorname{tg}\angle BAC = \dfrac{2 \cdot IK \cdot AK^2}{AK^2 - IK^2}$. Подставляя в эту формулу числа из условия, получаем ответ.

Задача 8. (5 баллов)

В некоторой стране 100 городов. Каждый из них связан двусторонним авиасообщением с тремя другими городами. При этом из любого города можно добраться в любой другой, возможно, с пересадками. Вася хочется добраться из города А в город Б. Какого наименьшего числа перелётов ему гарантированно хватит?

Ответ: 72

Решение:



Перед нами схема авиалиний страны, в которой, чтобы добраться из города 1 в город 100 не хватит 71 перелёта. Основная часть схемы состоит из повторяющихся блоков по 4 города, см. города 5, 6, 7 и 8.

Для того, чтобы попасть из города 1 в город 5, нужно 2 перелёта, затем из города 5 в город 93 по 3 перелёта за каждые 4 горорда, то есть 66 перелётов, и ещё 4 перелёта, чтобы добраться из города 93 в город 100, итого, минимум 72.

С другой стороны, 72 перелёта всегда достаточно, чтобы добраться от любого города до любого.

Чтобы доказать это, поместим какой-нибудь начальный город на уровень 0, соединённые с ним (будем называть их соседними) города — на уровень 1, их оставшихся соседей — на уровень 2, и так далее. Каждый раз на уровень $k+1$ мы помещаем города, соседние с городами на уровне k, если им ранее не сопоставлен другой уровень. (Приведённый выше пример нарисован как раз по этому принципу).

Каждый город на уровне k может быть соединён только с городами на уровнях $k-1$, k и $k+1$. Это значит, что на каждых трёх подряд идущих уровнях в сумме хотя бы 4 города. Кроме того, на двух первых уровнях не менее 4 городов, как и на двух последних.

Это означает, что у нас не может быть более $2 + 2 + 92 \cdot \frac{3}{4} = 73$ уровей, то есть максимально возможный номер уровня равен 72. Но номер уровня — это и есть количество перелётов, необходимое, чтобы добраться в город на этом уровне из начального города. Поскольку в качестве начального города можно выбрать любой из 100 городов, это значит, что от любого города до любого можно добраться не более, чем за 72 перелёта.