1.2 Задания 1 отборочного этапа олимпиады

1.2.1 Задания для 11 класса

Ниже приведен один из вариантов заданий.

Задача 1. (2 балла)

Окружность с центром в точке O построена на стороне AD четырёхугольника $ABCD$ как на диаметре. Остальные стороны лежат на касательных к этой окружности. Точка E — середина BC. Известно, что $AB = 2$, радиус окружности равен 3. Найдите $\dfrac{S_{ABEO}}{S_{OECD}}$. Ответ запишите в виде несократимой дроби.

Ответ: 21/31

Задача 2. (2 балла)

Для некоторой функции $f(x)$ её значение и значение её производной в точке x_0 — различные натуральные числа. Производная функции $f(x)$ — возрастающая функция. Найдите наименьшее возможное целое значение $f(x_0 + 1)$.

Ответ: 4

Задача 3. (3 балла)

Какое наибольшее количество прямоугольных параллелепипедов $1 \times 1 \times 6$ можно разместить в кубе $15 \times 15 \times 15$?

Ответ: 558

Задача 4. (3 балла)

Сфера S_1 касается трёх граней куба со стороной 2, а сфера S_2 — сферы S_1 и остальных трёх граней. Найдите наименьшую возможную сумму объёмов этих сфер. Ответ округлите до тысячных в любую сторону.

Ответ: 2,134

Задача 5. (3 балла)

На окружности на плоскости с центром в начале координат отметили 105 точек, а затем выписали их координаты. Какое наименьшее количество различных чисел могло получиться?

Ответ: 53

Задача 6. (3 балла)

Известно, что $\log_a b + \log_b c + \log_c a = \log_b a + \log_c b + \log_a c = 4$. Найдите $\log_a^2 b + \log_b^2 c + \log_c^2 a + \log_b^2 a + \log_c^2 b + \log_a^2 c$.

Ответ: 16

Задача 7. (3 балла)

Последовательность $\{a_n\}$ задана условиями $a_1 = 23$, $a_n = 23^{a_{n-1}}$. Найдите остаток от деления a_{91} на 91.

Ответ: 4

Задача 8. (4 балла)

В клубе есть некоторое количество джентльменов, у каждого из них ровно по 5 друзей. В понедельник в клубе двое из джентльменов рассказали один и тот же анекдот всем своим друзьям. Джентльмен, услышавший анекдот во второй раз, на следующий день рассказывает его всем своим друзьям.

Сколько джентльменов могли рассказать анекдот за неделю (с понедельника по воскресенье)? Укажите наибольшее возможное число.

Ответ: 101

Задача 9. (4 балла)

S_1 — окружность с центром в точке O_1 и радиусом 5. S_2 — окружность с центром в точке O_2 и радиусом 4. S_3 — окружность с центром в точке O_3 и радиусом 6. S_1 и S_2 касаются внешним образом в точке A, прямая AC — их общая касательная. S_2 и S_3 касаются внешним образом в точке B, прямая BC — их общая касательная. Длина отрезка AC равна 8. Найдите длину отрезка O_1O_3. Укажите точный ответ.

Ответ: 17

Задача 10. (4 балла)

Найдите суммарную длину всех отрезков, составляющих множество решений неравенства

$$\left(\sqrt{\left[\frac{x}{2}\right]\{x\}}-1\right)\left(\left\{\frac{x}{2}\right\}-\frac{1}{2}\right)\geqslant 0$$

на промежутке $[2; 201]$. Здесь $[z]$ обозначает целую часть z, а $\{z\}$ — дробную.

Ответ: 99,1