1.1.5 Задания для 7 класса

1 вариант

Задача 1. (2 балла)

Существуют ли такие два натуральных числа x и y, имеющие одинаковое количество натуральных делителей, что $x > y$, а сумма всех делителей x (включая единицу и само число) меньше суммы натуральных делителей y (включая единицу и само число)?

Задача 2. (2 балла)

Рыцари и лжецы сыграли в “испорченный телефон” по следующим правилам: первый в цепочке называет какое-то число на ушко второму, второй — третьему и так далее. Последний в цепочке озвучивает число вслух. При этом рыцарь называет то же самое число, которое ему сказали, а лжец добавляет или вычитает единицу.

Первый человек (лжец) назвал своему соседу число 7. Последний человек озвучил число 3.

После этого участники сыграли в эту игру ещё раз, однако соообщали друг друг числа по цепочке в обратную сторону. Последний человек назвал своему соседу число 5, а первый в конце игры озвучил число 2.

Кем был последний человек в цепочке?

Задача 3. (2 балла)

У Васи была коллекция покемонов. В феврале цены на всех покемонов упали на 10%. Затем в марте покемоны снова подорожали, каждый по-своему, и общая стоимость Васиной коллекции стала такой же, как в концея января. При этом состав коллекции не менялся. Докажите, что какой-то покемон подорожал больше, чем на 11%.

Задача 4. (3 балла)

Придумайте два различных набора из восьми натуральных чисел каждый, такие что сумма чисел в каждом наборе равна их произведению.

Для разных наборов сумма и произведение могут быть разными. Числа в наборах могут повторяться.

Задача 5. (3 балла)

Из натурального числа вычли его наибольшую цифру. Затем из получившегося числа также вычли его наибольшую цифру, и т.д. После шести таких операций получилось число 100. Какое число могло быть написано изначально? Перечислите все варианты и докажите, что других нет.

Задача 6. (3 балла)

В четырёхугольнике $ABCD$ на стороне AD взята точка X такая, что отрезки XB и XC делят четырёхугольник на три равных неравнобедренных треугольника. Докажите, что точка X — середина стороны или один из углов треугольника равен 60°

В этой задаче можно пользоваться тем, что сумма углов треугольника составляет 180°

Задача 7. (4 балла)

Внутри семиугольника $ABCDEF$ отметили точку O. Её соединили отрезками со всеми вершинами шестиугольника, разбив его таким образом на семь треугольников. Все эти треугольники оказались прямоугольными. Докажите, что в одном из этих треугольников прямой угол лежит при вершине O.

Задача 8. (5 баллов)

Фигура недослон бьёт на одну клетку по диагонали. Какое наибольшее количество не бьющих друг друга недослонов можно расставить на шахматной доске 7×7?

2 вариант

Задача 1. (2 балла)

Существуют ли такие два натуральных числа x и y, имеющие одинаковое количество натуральных делителей, что $x < y$, а сумма всех делителей x (включая единицу и само число) больше суммы натуральных делителей y (включая единицу и само число)?

Задача 2. (2 балла)

Рыцари и лжецы сыграли в “испорченный телефон” по следующим правилам: первый в цепочке называет какое-то число на ушко второму, второй — третьему и так далее. Последний в цепочке озвучивает число вслух. При этом рыцарь называет то же самое число, которое ему сказали, а лжец добавляет или вычитает единицу.

Первый человек (рыцарь) назвал своему соседу число 10. Последний человек озвучил число 13.

После этого участники сыграли в эту игру ещё раз, однако сооообщали друг друг числа по цепочке в обратную сторону. Последний человек назвал своему соседу число 12, а первый в конце игры озвучил число 9.

Кем был последний человек в цепочке?

Задача 3. (2 балла)

У Васи была коллекция покемонов. В феврале цены на всех покемонов упали на 30%. Затем в марте покемоны снова подорожали, каждый по-своему, и общая стоимость Васиной коллекции стала такой же, как в концея января. При этом состав коллекции не менялся. Докажите, что какой-то покемон подорожал больше, чем на 40%.

Задача 4. (3 балла)

Придумайте два различных набора из пяти натуральных чисел каждый, такие что сумма чисел в каждом наборе равна их произведению.

Для разных наборов сумма и произведение могут быть разными. Числа в наборах могут повторяться.

Задача 5. (3 балла)

Из натурального числа вычли его наибольшую цифру. Затем из получившегося числа также вычли его наибольшую цифру, и т.д. После пяти таких операций получилось число 200. Какое число могло быть написано изначально? Перечислите все варианты и докажите, что других нет.

Задача 6. (3 балла)

В четырёхугольнике $ABCD$ на стороне BC взята точка X такая, что отрезки XA и XD делят четырёхугольник на три равных неравнобедренных треугольника. Докажите, что точка X — середина стороны или один из углов треугольника равен 60°

В этой задаче можно пользоваться тем, что сумма углов треугольника составляет 180

Задача 7. (4 балла)

Внутри шестиугольника $ABCDEF$ отметили точку O. Её соединили отрезками со всеми вершинами шестиугольника, разбив его таким образом на шесть треугольников. Все эти треугольники оказались прямоугольными. Докажите, что в одном из этих треугольников прямой угол лежит при вершине O.

Задача 8. (5 баллов)

Фигура недослон бьёт на одну клетку по диагонали. Какое наибольшее количество не бьющих друг друга недослонов можно расставить на шахматной доске 9×9?