1.3.2 Задания для 10 класса

Задача 1. (1 балл)

1. Координаты двух векторов на плоскости — четыре различных натуральных числа. Какое наименьшее значение может принимать их скалярное произведение?

2. Координаты двух векторов на плоскости — четыре различных нечётных натуральных числа. Какое наименьшее значение может принимать их скалярное произведение?

3. Координаты двух векторов на плоскости — четыре различных чётных натуральных числа. Какое наименьшее значение может принимать их скалярное произведение?

Ко вводу разрешены цифры

Задача 2. (2 балла)

1. Известно, что в некотором треугольнике радиусы его вневписанных окружностей равны $\frac{11\sqrt{6}}{2}$, $\frac{11\sqrt{6}}{3}$ и $\frac{11\sqrt{6}}{6}$. Найдите квадрат радиуса вписанной окружности для этого треугольника.

2. Известно, что в некотором треугольнике радиусы его вневписанных окружностей равны $\frac{3\sqrt{14}}{5}$, $\frac{2\sqrt{14}}{3}$ и $\frac{6\sqrt{14}}{5}$. Найдите квадрат радиуса вписанной окружности для этого треугольника.

3. Известно, что в некотором треугольнике радиусы его вневписанных окружностей равны $\frac{4\sqrt{5}}{3}$, $\frac{12\sqrt{5}}{7}$ и $\frac{3\sqrt{5}}{2}$. Найдите квадрат радиуса вписанной окружности для этого треугольника.

Ко вводу разрешены цифры, минус и знак деления, точка или запятая в качетсве десятичного разделителя

Задача 3. (3 балла)

1. Окружность, радиус которой равен 3, касается гипотенузы прямоугольного треугольника, а также продолжений его обоих катетов. Найдите периметр треугольника.

2. Окружность, радиус которой равен 4, касается гипотенузы прямоугольного треугольника, а также продолжений его обоих катетов. Найдите периметр треугольника.

3. Окружность, радиус которой равен 5, касается гипотенузы прямоугольного треугольника, а также продолжений его обоих катетов. Найдите периметр треугольника.

Ко вводу разрешены цифры, знак деления, точка или запятая в качестве десятичного разделителя

Задача 4. (3 балла)

1. Вычислите сумму: $\frac{1\cdot 2018!}{2018!}+\frac{2\cdot 2018!}{1!\cdot 2017!}+\frac{4\cdot 2018!}{2!\cdot 2016!}+\frac{8\cdot 2018!}{3!\cdot 2015!}+\ldots+\frac{2^{2017}\cdot 2018!}{2017!\cdot 1!}+\frac{2^{2018}\cdot 2018!}{2018!}$
Для обозначения степени используйте значок $\wedge$.
Примеры записи ответа: 390625, 5^8

2. Вычислите сумму: $\frac{1\cdot 2018!}{2018!}+\frac{3\cdot 2018!}{1!\cdot 2017!}+\frac{9\cdot 2018!}{2!\cdot 2016!}+\frac{27\cdot 2018!}{3!\cdot 2015!}+\ldots+\frac{3^{2017}\cdot 2018!}{2017!\cdot 1!}+\frac{3^{2018}\cdot 2018!}{2018!}$
Для обозначения степени используйте значок $\wedge$.
Примеры записи ответа: 390625, 5^8

3. Вычислите сумму: $\frac{1\cdot 2019!}{2019!}+\frac{2\cdot 2019!}{1!\cdot 2018!}+\frac{4\cdot 2019!}{2!\cdot 2017!}+\frac{8\cdot 2019!}{3!\cdot 2016!}+\ldots+\frac{2^{2018}\cdot 2019!}{2018!\cdot 1!}+\frac{2^{2019}\cdot 2019!}{2019!}$

Для обозначения степени используйте значок $\wedge$.
Примеры записи ответа: 390625, 5^8
Ко вводу разрешены цифры, шляпка для обозначения степени

Задача 5. (3 балла)

1. Пусть $m(a)$ и $M(a)$ — наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)=x^2+2ax-a-3$ на отрезке $[-2;1]$. Решите уравнение $m(a)+M(a)=-9$.

Если возможных значений несколько, перечислите их в любом порядке через точку с запятой.

2. Пусть $m(a)$ и $M(a)$ - наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)=x^2-2ax+a-3$ на отрезке $[-1;2]$. Решите уравнение $m(a)+M(a)=-2$.

Если возможных значений несколько, перечислите их в любом порядке через точку с запятой.

3. Пусть $m(a)$ и $M(a)$ — наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)=x^2+2ax+a+3$ на отрезке $[-2;-1]$. Решите уравнение $m(a)+M(a)=4\frac{3}{4}$.

Ко вводу разрешены цифры, минус и знак деления, точка или запятая в качестве десятичного разделителя, точка с запятой

Задача 6. (3 балла)

1. Многочлен $P(x)=(x+3)^4(x^2+3x+1)^5$ представлен в виде $\sum\limits_{k=0}^{14} a_k(x+1)^k$. Найдите $a_0+a_2+\ldots+a_{14}$.

2. Многочлен $P(x)=(x+1)^6(x^2-2x-2)^4$ представлен в виде $\sum\limits_{k=0}^{14} a_k(x+1)^k$. Найдите $a_0+a_2+\ldots+a_{14}$.

3. Многочлен $P(x)=(x-4)^4(x^2+\frac{3}{2}x-1)^5$ представлен в виде $\sum\limits_{k=0}^{14} a_k(x+1)^k$. Найдите $a_0+a_2+\ldots+a_{14}$.

Ко вводу разрешены цифры, минус и знак деления, точка или запятая в качетсве десятичного разделителя

Задача 7. (3 балла)

1. На плоскости отмечены несколько прямых, среди которых нет параллельных друг другу. На каждой из прямых ровно три точки пересечения с другими отмеченными прямыми.

Найдите наименьшее и наибольшее количество прямых, которые могли бы быть отмечены. В ответе укажите эти числа через точку с запятой

2. На плоскости отмечены несколько прямых. На каждой из прямых ровно две точки пересечения с другими отмеченными прямыми.

Найдите наименьшее и наибольшее количество прямых, которые могли бы быть отмечены. В ответе укажите эти числа через точку с запятой

3. На плоскости отмечены несколько прямых, не пересекающихся в одной точке. На каждой из прямых не больше двух точек пересечения с другими отмеченными прямыми, причём есть прямые и с одной, и с двумя такими точками.

Найдите наименьшее и наибольшее количество прямых, которые могли бы быть отмечены. В ответе укажите эти числа через точку с запятой

Ко вводу разрешены цифры, точка с запятой

Задача 8. (3 балла)

1. Сколько существует пар натуральных чисел, для которых число 1000 является НОК? (Числа в паре могут быть одинаковыми, порядок чисел в паре не важен)

2. Сколько существует пар натуральных чисел, для которых число 400 является НОК? (Числа в паре могут быть одинаковыми, порядок чисел в паре не важен)

3. Сколько существует пар натуральных чисел, для которых число 392 является НОК? (Числа в паре могут быть одинаковыми, порядок чисел в паре не важен)

Ко вводу разрешены цифры

Задача 9. (4 балла)

1. Дана дробно-линейная (не постоянная и не линейная) функция $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$. Оказалось, что $f(f(x)) = 2f(2x)$ и $bc = -48$. Найдите d. Если возможных значений несколько, перечислите их в любом порядке через точку с запятой.

2. Дана дробно-линейная (не постоянная и не линейная) функция $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$. Оказалось, что $f(f(x)) = 3f(3x)$ и $bc = -63$. Найдите a. Если возможных значений несколько, перечислите их в любом порядке через точку с запятой.

3. Дана дробно-линейная (не постоянная и не линейная) функция $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$. Оказалось, что $f(f(x)) = \frac{1}{2}f(\frac{1}{2}x)$ и $bc = -12$. Найдите d. Если возможных значений несколько, перечислите их в любом порядке через точку с запятой.

Ко вводу разрешены цифры, минус и знак деления, точка или запятая в качестве десятичного разделителя, точка с запятой

Задача 10. (4 балла)

1. Гномы выкопали систему туннелей, которая имела вид прямоугольной сетки 8 на 2. Главный вход расположен в левой нижней вершине $(0,0)$, а главный выход — в правой верхней вершине $(8,2)$. Тунели пронумерованы следующим образом: туннель, соединяющий вершины (x,k) и $(x+1,k)$, имеет номер равный $8k+x+1$, а туннель, соединяющий вершины (m,y) и $(m,y+1)$, имеет номер равный $24+9y+m+1$. Произошел обвал, в результате которого все туннели, номера которых являлись простыми числами, стали нерабочими. Гномы смогли восстановить туннель с номером 3. Сколькими способами теперь можно пройти от главного входа до главного выхода, пройдя по каждому туннелю не более одного раза?

2. Гномы выкопали систему туннелей, которая имела вид прямоугольной сетки 9 на 2. Главный вход расположен в левой нижней вершине $(0,0)$, а главный выход — в правой верхней вершине $(9,2)$. Тунели пронумерованы следующим образом: туннель, соединяющий вершины (x,k) и $(x+1,k)$, имеет номер равный $9k+x+1$, а туннель, соединяющий вершины (m,y) и $(m,y+1)$, имеет номер равный $27+10y+m+1$. Произошел обвал,

в результате которого все туннели, номера которых являлись простыми числами, стали нерабочими, а так же нерабочим оказался туннель под номером 34. Сколькими способами теперь можно пройти от главного входа до главного выхода, пройдя по каждому туннелю не более одного раза?

выкопали систему туннелей, которая имела вид прямоугольной сетки 7 на 2. Главный вход расположен в левой нижней вершине $(0, 0)$, а главный выход — в правой верхней вершине $(7, 2)$. Тунели пронумерованы следующим образом: туннель, соединяющий вершины (x, k) и $(x + 1, k)$, имеет номер равный $7k + x + 1$, а туннель, соединяющий вершины (m, y) и $(m, y + 1)$, имеет номер равный $21 + 8y + m + 1$. Произошел обвал, в результате которого все туннели, номера которых являлись простыми числами, стали нерабочими. Сколькими способами теперь можно пройти от главного входа до главного выхода, пройдя по каждому туннелю не более одного раза?

Ко вводу разрешены цифры