1.1.2 Задания для 10 класса

1 вариант

Задача 1. (2 балла)

В классе у каждого либо 5, либо 6 друзей (дружба взаимна), причём у любых двух друзей разное количество друзей в класса. Какое наименьшее количество учеников, большее 0 может быть в классе?

Задача 2. (2 балла)

В положительной непостоянной геометрической прогрессии среднее арифметическое второго, седьмого и девятого членов равно какому-то члену этой прогрессии. Какой минимальный номер у него может быть?

Задача 3. (2 балла)

Может ли число $n^{n^n} - 4n^n + 3$ быть простым при натуральном $n > 2$?

Задача 4. (2 балла)

Сколько отрицательных чисел среди чисел вида $\mathrm{tg}((15^n)^\circ)$, где n — натуральное число от 1 до 2019?

Задача 5. (3 балла)

Высота ромба, проведенная из вершины его тупого угла, делит сторону ромба в отношении 1:3, считая от вершины его острого угла. Какую часть площади ромба составляет площадь вписанного в него круга?

Задача 6. (3 балла)

Окружность пересекает все стороны остроугольного треугольника ABC, периметр которого 2. a, b, c — отрезки касательных к этой окружности из вершин A, B и C. Докажите, что $a + b + c \leqslant 1$.

Задача 7. (4 балла)

Можно ли расставить в квадратной таблице 100×100 числа от 0 до 9999 (каждое по одному разу) так, чтобы в каждом квадратике 2×2 сумма чисел была бы одинаковой?

Задача 8. (5 баллов)

Положительные числа x, y, z таковы, что $xyz = 20$, $x + y + z = 9$. Докажите, что $xy + yz + xz \geqslant 24$.

2 вариант

Задача 1. (2 балла)

В классе у каждого либо 5, либо 7 друзей (дружба взаимна), причём у любых двух друзей разное количество друзей в класса. Какое наименьшее количество учеников, большее 0 может быть в классе?

Задача 2. (2 балла)

В положительной непостоянной геометрической прогрессии среднее арифметическое третьего, четвёртого и восьмого членов равно какому-то члену этой прогрессии. Какой минимальный номер у него может быть?

Задача 3. (2 балла)

Может ли число $n^{n^n} - 6n^n + 5$ быть простым при натуральном $n > 2$?

Задача 4. (2 балла)

Сколько положительных чисел среди чисел вида $\operatorname{ctg}((15^n)^\circ)$, где n — натуральное число от 1 до 2019?

Задача 5. (3 балла)

Высота ромба, проведенная из вершины его тупого угла, делит сторону ромба в отношении 1:3, считая от вершины его острого угла. Какую часть площади ромба составляет площадь вписанного в него круга?

Задача 6. (3 балла)

Окружность пересекает все стороны остроугольного треугольника ABC, периметр которого 4. a, b, c — отрезки касательных к этой окружности из вершин A, B и C. Докажите, что $a + b + c \quad 2$.

Задача 7. (4 балла)

Можно ли расставить в прямоугольной таблице 100×10 числа от 0 до 999 (каждое по одному разу) так, чтобы в каждом квадратике 2×2 сумма чисел была бы одинаковой?

Задача 8. (5 баллов)

Положительные числа x, y, z таковы, что $xyz = 24$, $x + y + z = 10$. Докажите, что $xy + yz + xz \geqslant 28$.