1.1.4 Задания для 8 класса

1 вариант

Задача 1. (1 балл)

Найдите наибольшее трёхзначное число АБВ, которое делится на двузначные числа АБ и БВ. (Разные буквы не обязательно обозначают разные цифры)

Ответ: 990

Решение:

Число 990, очевидно, подходит. Большего ответа не может быть, так как все трёхзначные числа, большие 990, не делятся на 99: следующее делящееся на 99 число это 1089.

Задача 2. (2 балла)

Существует ли прямоугольный треугольник, площадь которого численно равна удвоенной гипотенузе?

Ответ: Да

Решение:

Таких треугольников довольно много. Докажем, что существует равнобедренный. Составим уравнение, обозначив его сторону за a:

$$\frac{a^2}{2} = 2\sqrt{2}a$$

Оно, очевидно, имеет решение $a = 4\sqrt{2}$.

Задача 3. (2 балла)

Какое наибольшее количество различных приведённых квадратных уравнений может быть выписано на доске, если известно, что любые два из них имеют общий корень, а никакие четыре не имеют корня, общего для всех.

Ответ: 3

Решение:

Рассмотрим три таких уравнения. Возможны два случая:

1) Эти уравнения имеют общий корень a. Тогда они могут быть представлены в виде $(x-a)(x-b) = 0$, $(x-a)(x-c) = 0$ и $(x-a)(x-d) = 0$, где b, c и d — их оставшиеся корни (они не равны друг другу, иначе уравнения совпадают; одно из этих чисел может совпадать с a, это не важно).

Четвёртое уравнение не может иметь корня a; тогда оно должно иметь корни b, c и d одновременно, то есть оно не квадратное.

Получаем противоречие.

2) Уравнения не имеют общего корня. Тогда их можно представить как $(x-a)(x-b) = 0$, $(x-a)(x-c) = 0$ и $(x-b)(x-c) = 0$. В это случае четвёртое уравнение может иметь только один из корней a, b и c, иначе оно совпадает с одним из ранее описанных.

Если оно имеет корень, например, a, то у него не может быть общего корня с $(x-b)(x-c) = 0$. Снова получаем противоречие.

Значит, больше трёх различных уравнений быть не может.

Пример легко построить для первого случая, взяв произвольные числа a, b, c, d.

Задача 4. (3 балла)

В каждой клетке квадрата 2018×2018 проведены обе диагонали. Существует ли замкнутый маршрут, состоящий из этих диагоналей, не проходящий ни по одной из диагоналей дважды и посещающий при этом все клетки квадрата (то есть, содержащий хотя бы одну диагональ из каждой клетки).

Ответ: Да, можно.

Решение:

Начнём путь с левого верхнего угла. Пересечём левую верхнюю клетку из её левого нижнего в правый верхний угол и продолжим движение по диагоналям направо до крайней правой клетки в верхнем ряду. Из-за чётности длины квадрата мы окажемся в правом нижнем углу этой клетки, поэтому мы сможем перейти во второй ряд.

Теперь по клеткам второго ряда будем двигаться до второй клетки слева. Из неё мы сможем повернуть в третий сверху ряд и снова пойти направо.

Таким образом мы по очереди пройдём все ряды: нечётные слева направо, чётные справа налево, после чего надо будет пройти первую колонку и вернуться в исходную точку.

Задача 5. (3 балла)

В трапеции $ABCD$ на основании AD взята точка X такая, что отрезки XB и XC делят трапецию на три подобных друг другу, но попарно не равных, неравнобедренных треугольника. Боковая сторона AB имеет длину 6. Найдите $AX \cdot DX$.

Ответ: 36

Решение:

Треугольники неравнобедренные, то есть все углы у них различны.

$\alpha = \angle BXA = \angle XBC \neq \angle BXC = \beta$. Угол $\angle CXD$ в сумме с этими углами даёт $180°$, значит, это третий угол треугольника, он не может быть равен ни α, ни β.

Если $\angle ABX = \beta$, мы получаем в треугольниках ABX и CBX равные углы вокруг общей стороны, то есть эти треугольники равны. Это противоречит условию, значит, $\angle ABX = \gamma$, и, соответственно, $\angle BAD = \beta$.

Аналогично получаем $\angle XCD = \alpha$ и $\angle XDC = \beta$, откуда трапеция равнобедренная.

Запишем теперь соотношение сторон в подобных треугольниках ABX и CDX:

$$\frac{DX}{CD} = \frac{AB}{AX},$$

откуда $DX \cdot AX = AB \cdot CD = 36$.

Задача 6. (4 балла)

Решите уравнение $abcdef = a + b + c + d + e + f$ в натуральных числах.

Ответ: $(1, 1, 1, 1, 2, 6)$ в любом порядке

Решение:

Обозначим наибольшее число за a. Общая сумма чисел не превосходит $6a$.

Предположим, в нашем наборе меньше трёх единиц. Тогда общее произведение хотя бы $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot a = 8a > 6a$. Получаем противоречие.

Значит, в наборе хотя бы три единицы и сумма уже строго меньше $6a$.

Таким образом, осталось разобрать случаи: $(1, 1, 1, 1, 2, a)$; $(1, 1, 1, 1, 3, a)$; $(1, 1, 1, 2, 2, a)$; $(1, 1, 1, 1, 4, a)$; $(1, 1, 1, 1, 5, a)$.

Для этого надо решить уравнения $2a = a + 6$; $3a = a + 7$; $4a = a + 7$; $4a = a + 8$ и $5a = a + 9$. Легко убедиться, что решения имеет только первое уравнение при $a = 6$.

Задача 7. (4 балла)

$OABC$ — прямоугольник на декартовой плоскости, со сторонами, параллельными осям координат. Точка O — начало координат, а точка B имеет координаты $(11; 8)$. Внутри прямоугольника взята точка X с целыми координатами. Какое наименьшее значение может принимать площадь треугольника OBX?

Ответ: $\dfrac{1}{2}$

Решение:

Поскольку картинка симметричная относительно центра прямоугольника, достаточно разобрать случай, когда точка X лежит ниже диагонали OB. Пусть Y и Z — проекции X на ось абсцисс и отрезок BC (здесь $C(11;0)$).

Тогда $S_{OBX} = S_{OABC} - S_{OAB} - S_{OXY} - S_{BXZ} - S_{XYCZ}$. Всё это — площади прямоугольников и прямоугольных треугольников, стороны и, соответственно, катеты которых параллельны осям координат, поэтому их площади целые или полуцелых. Следовательно, S_{OBX} тоже целая или полуцелая, то есть минимум $\frac{1}{2}$.

Число $\frac{1}{2}$ получается, если взять, например, точку $X(7;5)$.

$S_{OBX} = 88 - 44 - \frac{35}{2} - 20 - 6 = \frac{1}{2}$.

Вообще говоря, три точки на одной прямой не образуют треугольника, поэтому вырожденные треугольники площади 0 можно не рассматривать. Однако в этой задаче это неважно, так как точек внутри отрезка OB всё равно нет.

Задача 8. (4 балла)

Дана клетчатая доска 7×7, длина стороны каждой клетки которой один сантиметр. Шахматная фигура Пифагор, стоящая на клетке A бьёт клетку B, если расстояние между центрами клеток A и B составляет пять сантиметров. Какое наибольшее количество не бьющих друг друга Пифагоров можно расставить на доске?

Ответ: 25.

Решение:

Заметим, что при шахматной раскраске доски Пифагор бьёт только клетки цвета, противоположного цвету клетки, на которой стоит он сам.

Пример: покрасим доску в шахматном порядке, и расставим Пифагоров на клетках того цвета, которого оказалось больше.

Оценка: разметим поле следующим образом:

A	B	C	D	E	F	G
H	I	J	K	L	M	N
O	P	Q	R	S	O	P
T	U	G		V	T	U
W	X	N	A	H	W	X
S	B	C	D	E	F	Q
V	I	J	K	L	M	R

На каждой паре клеток, помеченной одинаковыми буквами, может стоять максимум один Пифагор. Плюс ещё один может стоять в центральной клетке.

2 вариант

Задача 1. (2 балла)

Найдите наименьшее трёхзначное число АБВ, которое делится на числа АБ и БВ (цифра А не может быть равна 0, а цифра Б — может быть; разные буквы не обязательно обозначают разные цифры)

Ответ: 110

Решение:

Число 110, очевидно, подходит. Меньшего ответа не может быть, так как все трёхзначные числа, меньшие 110, начинаются на 10. При этом они не делятся на 10, кроме 100, а 100 не делится на 0.

Задача 2. (2 балла)

Существует ли прямоугольный треугольник, площадь которого численно равна утроенной гипотенузе?

Ответ: Да

Решение:

Таких треугольников довольно много. Докажем, что существует равнобедренный. Составим уравнение, обозначив его сторону за a:

$$\frac{a^2}{2} = 3\sqrt{2}a$$

Оно, очевидно, имеет решение $a = 6\sqrt{2}$.

Задача 3. (2 балла)

Какое наибольшее количество различных приведённых квадратных уравнений может быть выписано на доске, если известно, что любые два из них имеют общий корень, а никакие пять не имеют корня, общего для всех.

Ответ: 4

Решение:

Рассмотрим 4 таких уравнения. Возможны два случая:

1) Эти уравнения имеют общий корень a. Тогда они могут быть представлены в виде $(x-a)(x-b)=0$, $(x-a)(x-c)=0$, $(x-a)(x-d)=0$ и $(x-a)(x-e)=0$, где b, c, d и e — их оставшиеся корни (они не равны друг другу, иначе уравнения совпадают; одно из этих чисел может совпадать с a, это не важно).

Пятое уравнение не может иметь корня a; тогда оно должно иметь корни b, c, d и e одновременно, то есть оно не квадратное. Получаем противоречие.

2) Уравнения не имеют общего корня. Тогда три из них можно представить как $(x-a)(x-b)=0$, $(x-a)(x-c)=0$ и $(x-b)(x-c)=0$. В это случае четвёртое уравнение может иметь только один из корней a, b и c, иначе оно совпадает с одним из ранее описанных.

Если оно имеет корень, например, a, то у него не может быть общего корня с $(x-b)(x-c)=0$. Снова получаем противоречие. Поэтому в этом случае даже больше трёх различных уравнений быть не может.

Пример легко построить в для первого случая, взяв произвольные числа a, b, c, d и e

Задача 4. (3 балла)

В каждой клетке квадрата 2020×2020 проведены обе диагонали. Существует ли замкнутый маршрут, состоящий из этих диагоналей, не проходящий ни по одной из диагоналей дважды и посещающий при этом все клетки квадрата (то есть, содержащий хотя бы одну диагональ из каждой клетки).

Ответ: Да, можно.

Решение:

Начнём путь с левого верхнего угла. Пересечём левую верхнюю клетку из её левого нижнего в правый верхний угол и продолжим движение по диагоналям направо до крайней правой клетки в верхнем ряду. Из-за чётности длины квадрата мы окажемся в правом нижнем углу этой клетки, поэтому мы сможем перейти во второй ряд.

Теперь по клеткам второго ряда будем двигаться до второй клетки слева. Из неё мы сможем повернуть в третий сверху ряд и снова пойти направо.

Таким образом мы по очереди пройдём все ряды: нечётные слева направо, чётные справа налево, после чего надо будет пройти первую колонку и вернуться в исходную точку.

Задача 5. (3 балла)

В трапеции $ABCD$ на основании BC взята точка X такая, что отрезки XA и XD делят трапецию на три подобных друг другу, но попарно не равных, неравнобедренных треугольника. Боковая сторона AB имеет длину 5. Найдите $XC \cdot BX$.

Ответ: 25

Решение:

Треугольники неравнобедренные, то есть все углы у них различны.

$\alpha = \angle BXA = \angle XAD \neq \angle AXD = \beta$. Угол $\angle CXD$ в сумме с этими углами даёт $180°$, значит, это третий угол треугольника, он не может быть равен ни α, ни β.

Если $\angle BAX = \beta$, мы получаем в треугольниках BAX и DAX равные углы вокруг общей стороны, то есть эти треугольники равны. Это противоречит условию, значит, $\angle BAX = \gamma$, и, соответственно, $\angle ABC = \beta$.

Аналогично получаем $\angle XDC = \alpha$ и $\angle XCD = \beta$, откуда трапеция равнобедренная.

Запишем теперь соотношение сторон в подобных треугольниках ABX и CDX:

$$\frac{XC}{CD} = \frac{AB}{BX},$$

откуда $XC \cdot BX = AB \cdot CD = 25$.

Задача 6. (3 балла)

Решите уравнение $abcdefg = a + b + c + d + e + f + g$ в натуральных числах.

Ответ: $(1,1,1,1,1,2,7)$ и $(1,1,1,1,1,3,4)$. в любом порядке

Решение:

Обозначим наибольшее число за a. Общая сумма чисел не превосходит $7a$.

Предположим, в нашем наборе меньше четырёх единиц. Тогда общее произведение хотя бы $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot a = 8a > 7a$. Получаем противоречие.

Значит, в наборе хотя бы четыре единицы и сумма уже строго меньше $7a$.

Таким образом, осталось разобрать случаи: $(1,1,1,1,1,2,a)$; $(1,1,1,1,1,3,a)$; $(1,1,1,1,2,2,a)$; $(1,1,1,1,1,4,a)$; $(1,1,1,1,1,5,a)$; $(1,1,1,1,2,3,a)$; $(1,1,1,1,1,6,a)$.

Для этого надо решить уравнения $2a = a + 7$; $3a = a + 8$; $4a = a + 8$; $4a = a + 9$, $5a = a + 10$, $6a = a + 9$ и $6a = a + 11$. Легко убедиться, что решения имеют только первое уравнение при $a = 7$, второе при $a = 4$ и четвёртое при $a = 3$, что даёт нам два набора: $(1,1,1,1,1,2,7)$ и $(1,1,1,1,1,3,4)$.

Задача 7. (4 балла)

$OABC$ — прямоугольник на декартовой плоскости, со сторонами, параллельными осям координат. Точка O — начало координат, а точка B имеет координаты $(9;8)$. Внутри прямоугольника взята точка X с целыми координатами. Какое наименьшее значение может принимать площадь треугольника OBX?

Ответ: $\frac{1}{2}$

Решение:

Поскольку картинка симметричная относительно центра прямоугольника, достаточно разобрать случай, когда точка X лежит ниже диагонали OB. Пусть Y и Z — проекции X на ось абсцисс и отрезок BC (здесь $C(9;0)$).

Тогда $S_{OBX} = S_{OABC} - S_{OAB} - S_{OXY} - S_{BXZ} - S_{XYCZ}$. Всё это — площади прямоугольников и прямоугольных треугольников, стороны и, соответственно, катеты которых параллельны осям координат, поэтому их площади целые или полуцелых. Следовательно, S_{OBX} тоже целая или полуцелая, то есть минимум $\frac{1}{2}$.

Число $\frac{1}{2}$ получается, если взять, например, точку $X(8;7)$.

$S_{OBX} = 72 - 36 - 28 - \frac{1}{2} - 7 = \frac{1}{2}$.

Вообще говоря, три точки на одной прямой не образуют треугольника, поэтому вырожденные треугольники площади 0 можно не рассматривать. Однако в этой задаче это неважно, так как точек внутри отрезка OB всё равно нет.

Задача 8. (4 балла)

Дана клетчатая доска 8×8, длина стороны каждой клетки которой один сантиметр. Шахматная фигура Пифагор, стоящая на клетке A бьёт клетку B, если расстояние между центрами клеток A и B составляет пять сантиметров. Какое наибольшее количество не бьющих друг друга Пифагоров можно расставить на доске?

Ответ: 32

Решение:

Заметим, что при шахматной раскраске доски Пифагор бьёт только клетки цвета, противоположного цвету клетки, на которой стоит он сам.

Пример: покрасим доску в шахматном порядке, и расставим Пифагоров на клетках того цвета, которого оказалось больше.

Оценка: разметим поле следующим образом:

1	2	3	4	5	6	7	8
A	B	C	D	E	F	G	H
I	J	K	L	M	O	P	Q
R	S	T	U	V	W	X	Z
5	6	7	8	1	2	3	4
E	F	G	H	A	B	C	D
M	O	P	Q	I	J	K	L
V	W	X	Z	R	S	T	U

На каждой паре клеток, помеченной одинаковыми символами, может стоять максимум один Пифагор.

8 класс

1. (2 балла)

(в условии задач одного из вариантов написано, что 1 балл. Пускай будет 2)

Только ответ без обоснования того, что он наибольший/наименьший — *0,5 балла.*

Не требовать проверки делением того, что 990 делится на 99 и 90, а 110 на 11 и 10.

2. (2 балла)

Только ответ "Да" — *0 баллов.*

Вообще говоря, Конкретные стороны треугольника предъявлять не обязательно, достаточно доказать, что он существует.

При наличии арифметических ошибок, несущественно влияющих на ход решения, — *снимать 0,5 балла.*

3. (2 балла)

Только ответ с примером — *0,5 балла.*

Не снимать баллы за отсутствие примера, если он явным образом следует из доказанной оценки. Если не следует, *снимать 0,5 балла.*

Оценка, в которой пропущен один из двух случаев, оценивается в *0 баллов.*

4. (3 балла)

Только ответ "Да" — *0 баллов.*

5. (3 балла)

Только ответ — *0 баллов.*

Правильный ответ с правильно распределёнными углами без обоснования, почему картинка именно такая — *1,5 балла.*

6. (4 балла)

1 вариант: только ответ — *1 балл.*

2 вариант: за каждый из найденных ответов *по 0,5 балла.*

При доказательстве того, что другие случаи невозможны, за каждый потерянный или неверно разобранный случай *снимать 1 балл (из 3 баллов за эту часть решения).*

7. (4 балла)

Только ответ — *0 баллов.*

Ответ с указанием нужной точки — *1 балл.*

Ответ с указанием нужной и вычислением площадей — *2 балла.*

Оставшиеся *2 балла* ставятся за обоснование того, что площадь не может быть меньше половины.

Разрешается использовать факты, выходящие за рамки программы 8 класса, например, формулы для вычисления площади через векторы или координаты. В частности, если кто-то корректно сошлётся на факт, что площадь треугольника должна быть целой или полуцелой, решение должно быть засчитано.

8. (4 балла)

Только ответ без оценки и без примера (или с неправильным примером) — *0 баллов.*

Пример — *2 балла*, оценка — *ещё 2 балла*

Обоснование примера (если он предъявлен в явном виде и верен) не требуется.