1.1.5 Задания для 7 класса

1 вариант

Задача 1. (2 балла)

Существуют ли такие два натуральных числа x и y, имеющие одинаковое количество натуральных делителей, что $x > y$, а сумма всех делителей x (включая единицу и само число) меньше суммы натуральных делителей y (включая единицу и само число)?

Ответ: Да

Решение:

Например, числа 38 и 39: $1 + 2 + 19 + 38 = 60 > 56 = 1 + 3 + 13 + 39$.

Задача 2. (2 балла)

Рыцари и лжецы сыграли в “испорченный телефон” по следующим правилам: первый в цепочке называет какое-то число на ушко второму, второй — третьему и так далее. Последний в цепочке озвучивает число вслух. При этом рыцарь называет то же самое число, которое ему сказали, а лжец добавляет или вычитает единицу.

Первый человек (лжец) назвал своему соседу число 7. Последний человек озвучил число 3.

После этого участники сыграли в эту игру ещё раз, однако сооббщали друг друг числа по цепочке в обратную сторону. Последний человек назвал своему соседу число 5, а первый в конце игры озвучил число 2.

Кем был последний человек в цепочке?

Ответ: Рыцарь

Решение:

В первой игре число не меняет чётность, значит, количество лжецов в цепочке со 2 по последнего чётно.

Из результата второй игры получаем, что количество лжецов в цепочек от предпоследнего к первому нечётно.

Это значит, что первый и последний люди разного типа, то есть последний — рыцарь.

Задача 3. (2 балла)

У Васи была коллекция покемонов. В феврале цены на всех покемонов упали на 10%. Затем в марте покемоны снова подорожали, каждый по-своему, и общая стоимость Васиной коллекции стала такой же, как в концея января. При этом состав коллекции не менялся. Докажите, что какой-то покемон подорожал больше, чем на 11%.

Доказательство:

Пусть все цены поднялись не более чем на 11%, мы получаем, что в итоге стоимость коллекции составила не более, чем $0,9 \cdot 1,11 = 99,9\%$ от изначальной её стоимости.

Задача 4. (3 балла)

Придумайте два различных набора из восьми натуральных чисел каждый, такие что сумма чисел в каждом наборе равна их произведению.

Для разных наборов сумма и произведение могут быть разными. Числа в наборах могут повторяться.

Ответ: $(1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 8)$ и $(1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 3$ с точностью до порядка

Задача 5. (3 балла)

Из натурального числа вычли его наибольшую цифру. Затем из получившегося числа также вычли его наибольшую цифру, и т.д. После шести таких операций получилось число 100. Какое число могло быть написано изначально? Перечислите все варианты и докажите, что других нет.

Ответ: 130, 131, 132

Решение:

Для чисел от 101 до 139 покажем, к какое из чисел оно переходит. В третьем столбце указано, за сколько операций получается 100.

$10x, x > 0$	100	1
110	109	2
$11x, x > 0$	110	3
120	118	4
121	119	4
$12x, x > 1$	120	5
130	127	6
131	128	6
132	129	6

Из всех остальных чисел в результате первой операции получается не меньше 130, значит, 100 получается больше, чем за 6 операций, если вообще получается.

Задача 6. (3 балла)

В четырёхугольнике $ABCD$ на стороне AD взята точка X такая, что отрезки XB и XC делят четырёхугольник на три равных неравнобедренных треугольника. Докажите, что точка X — середина стороны или один из углов треугольника равен $60°$

В этой задаче можно пользоваться тем, что сумма углов треугольника составляет $180°$

Доказательство:

Пусть ни один из углов не равен $60°$. Тогда три одинаковых угла не могут сходиться в точке X. Два одинаковых и третий не равный им тоже не могут, поскольку умма углов треугольника составляет $180°$, поэтому в точке X сходятся три разных угла равных треугольников.

BX — общая сторона двух равных треугольников, значит, она лежит между одинаковыми парами углов, отсюда $\angle ABX = \angle BXC$. Аналогично $\angle DCX = \angle BXC$.

Отрезки AX и DX лежат в равных треугольниках напротив равных углов, поэтому они равны и X — середина AD.

Задача 7. (4 балла)

Внутри семиугольника $ABCDEF$ отметили точку O. Её соединили отрезками со всеми вершинами шестиугольника, разбив его таким образом на семь треугольников. Все эти треугольники оказались прямоугольными. Докажите, что в одном из этих треугольников прямой угол лежит при вершине O.

Доказательство:

Угол семиугольника не может быть равен $180°$, поэтому в одной вершине семиугольника не могут сходиться в одной вершине шестиугольника.

Значит, если нет ни одного прямого угла при вершине O, то в каждой вершине семиугольника сходятся прямой угол одного треугольник и острый угол другого. Таким образом, каждый отрезок, соедяющий точку O с вершиной семиугольника, является катетом одного прямоугольного треугольника и гипотенузой соседнего.

Гипотенуза больше катета, так как лежит напротив большего угла. Получается, либо каждый такой отрезок больше следующего по часовой стрелке, либо, наоборот, каждый меньше следующего. Это невозможно, поскольку таким образом можно доказать, что каждый отрезок строго больше себя самого.

Полученное противоречие доказывает задачу.

Задача 8. (5 баллов)

Фигура недослон бьёт на одну клетку по диагонали. Какое наибольшее количество не бьющих друг друга недослонов можно расставить на шахматной доске 7×7?

Ответ: 28

Решение:

Рассмотрим все диагонали одного направления. На каждой диагонали чётной длины не более половины клеток может быть заняты недослонами, так как она разбивается на пары клеток, которые не могут быть одновременно заняты.

На каждой диагонали нечётной длины $2n+1$ недослонов может быть не более $n+1$ по тем же причинам.

Нечётных диагоналей всего 7, поэтому наибольшее возможное количество недослонов это $\dfrac{49-7}{2}+7=28$.

Пример можно построить, поставив недослонов во все клетки строк с нечётными номерами.

2 вариант

Задача 1. (2 балла)

Существуют ли такие два натуральных числа x и y, имеющие одинаковое количество натуральных делителей, что $x < y$, а сумма всех делителей x (включая единицу и само число) больше суммы натуральных делителей y (включая единицу и само число)?

Ответ: Да

Решение:

Например, числа 38 и 39: $1 + 2 + 19 + 38 = 60 > 56 = 1 + 3 + 13 + 39$.

Задача 2. (2 балла)

Рыцари и лжецы сыграли в “испорченный телефон” по следующим правилам: первый в цепочке называет какое-то число на ушко второму, второй — третьему и так далее. Последний в цепочке озвучивает число вслух. При этом рыцарь называет то же самое число, которое ему сказали, а лжец добавляет или вычитает единицу.

Первый человек (рыцарь) назвал своему соседу число 10. Последний человек озвучил число 13.

После этого участники сыграли в эту игру ещё раз, однако сооообщали друг друг числа по цепочке в обратную сторону. Последний человек назвал своему соседу число 12, а первый в конце игры озвучил число 9.

Кем был последний человек в цепочке?

Ответ: Рыцарь

Решение:

В первой игре число не меняет чётность, значит, количество лжецов в цепочке со 2 по последнего нечётно.

Из результата второй игры получаем, что количество лжецов в цепочек от предпоследнего к первому также нечётно.

Это значит, что первый и последний люди одного типа, то есть последний — также рыцарь.

Задача 3. (2 балла)

У Васи была коллекция покемонов. В феврале цены на всех покемонов упали на 30%. Затем в марте покемоны снова подорожали, каждый по-своему, и общая стоимость Васиной коллекции стала такой же, как в концея января. При этом состав коллекции не менялся. Докажите, что какой-то покемон подорожал больше, чем на 40%.

Доказательство:

Пусть все цены поднялись не более чем на 40%, мы получаем, что в итоге стоимость коллекции составила не более, чем $0,7 \cdot 1,4 = 98\%$ от изначальной её стоимости.

Задача 4. (3 балла)

Придумайте два различных набора из пяти натуральных чисел каждый, такие что сумма чисел в каждом наборе равна их произведению.

Для разных наборов сумма и произведение могут быть разными. Числа в наборах могут повторяться.

Ответ: $(1, 1, 1, 2, 5)$ и $(1, 1, 2, 2, 2)$ с точностью до порядка

Задача 5. (3 балла)

Из натурального числа вычли его наибольшую цифру. Затем из получившегося числа также вычли его наибольшую цифру, и т.д. После пяти таких операций получилось число 200. Какое число могло быть написано изначально? Перечислите все варианты и докажите, что других нет.

Ответ: Все числа от 222 до 229

Решение:

Для чисел от 201 до 139 покажем, к какое из чисел оно переходит. В третьем столбце указано, за сколько операций получается 100.

201	199	–
$20x, x > 1$	200	1
210	108	2
211	109	2
$21x, x > 1$	210	3
220	218	4
221	219	4
$22x, x > 1$	220	5

Из всех последующих чисел в результате первой операции получается не меньше 220, значит, 100 получается больше, чем за 5 операций, если вообще получается.

Задача 6. (3 балла)

В четырёхугольнике $ABCD$ на стороне BC взята точка X такая, что отрезки XA и XD делят четырёхугольник на три равных неравнобедренных треугольника. Докажите, что точка X — середина стороны или один из углов треугольника равен 60°

В этой задаче можно пользоваться тем, что сумма углов треугольника составляет 180°

Доказательство:

Пусть ни один из углов не равен 60°. Тогда три одинаковых угла не могут сходиться в точке X. Два одинаковых и третий не равный им тоже не могут, поскольку умма углов треугольника составляет 180°, поэтому в точке X сходятся три разных угла равных треугольников.

AX — общая сторона двух равных треугольников, значит, она лежит между одинаковыми парами углов, отсюда $\angle BAX = \angle AXD$. Аналогично $\angle CDX = \angle AXD$.

Отрезки BX и CX лежат в равных треугольниках напротив равных углов, поэтому они равны и X — середина BC.

Задача 7. (4 балла)

Внутри шестиугольника $ABCDEF$ отметили точку O. Её соединили отрезками со всеми вершинами шестиугольника, разбив его таким образом на шесть треугольников. Все эти треугольники оказались прямоугольными. Докажите, что в одном из этих треугольников прямой угол лежит при вершине O.

Доказательство:

Угол шестиугольника не может быть равен 180°, поэтому в одной вершине шестиугольника не могут сходиться в одной вершине шестиугольника.

Значит, если нет ни одного прямого угла при вершине O, то в каждой вершине шестиугольника сходятся прямой угол одного треугольник и острый угол другого. Таким образом, каждый отрезок, соедяющий точку O с вершиной шестиугольника, является катетом одного прямоугольного треугольника и гипотенузой соседнего.

Гипотенуза больше катета. Получается, либо каждый такой отрезок больше следующего по часовой стрелке, либо, наоборот, каждый меньше следующего. Это невозможно, поскольку таким образом можно доказать, что каждый отрезок строго больше себя самого.

Полученное противоречие доказывает задачу.

Задача 8. (5 баллов)

Фигура недослон бьёт на одну клетку по диагонали. Какое наибольшее количество не бьющих друг друга недослонов можно расставить на шахматной доске 9×9?

Ответ: 45

Решение:

Рассмотрим все диагонали одного направления. На каждой диагонали чётной длины не более половины клеток может быть заняты недослонами, так как она разбивается на пары клеток, которые не могут быть одновременно заняты.

На каждой диагонали нечётной длины $2n+1$ недослонов может быть не более $n+1$ по тем же причинам.

Нечётных диагоналей всего 9, поэтому наибольшее возможное количество недослонов это $\dfrac{81-9}{2}+9=45$.

Пример можно построить, поставив недослонов во все клетки строк с нечётными номерами.

7 класс

1. (2 балла)
Только ответ “Да” — *0 баллов.*

2. (2 балла)
Только ответ — *0 баллов.*
Ответ с примером, когда таков возможно — *1 балл.*
При верном обосновании примера не требуется.

3. (2 балла)
Доказательства “на примерах” не оцениваются.

4. (3 балла)
По полтора балла ставится за каждый из двух наборов.
Обоснования того, что нет других подходящих наборов не требуется.

5. (3 балла)
Только ответ: *0 баллов*
Все ответы с объяснением, как их можно получить *1,5 балла*
Больше половины ответов с объяснением, как их можно получить *1 балл*
Не менее трети ответов с объяснением, как их можно получить *0,5 балла*
Оставшиеся *1,5 балла* ставятся за обоснование того, что других ответов нет.

6. (3 балла)
Построение подходящего примера не оценивается.

7. (4 балла)
Доказательства “на примерах” не оцениваются.

8. (5 баллов)
Пример: — *2 балла*
Оценка — *3 балла*
Только ответ —- *0 баллов*