1.2 Задания 1 тура отборочного этапа олимпиады

1.2.1 Задания для 11 класса

Задача 1. (1 балл)

1. Найдите наибольшее значение выражения $5\sin x + 2\sqrt{6}\cos x$.

Ответ: 7

2. Найдите наибольшее значение выражения $6\sin x + 2\sqrt{7}\cos x$.

Правильный ответ: 8

3. Найдите наибольшее значение выражения $7\sin x + 4\sqrt{2}\cos x$.

Правильный ответ: 9.

Задача 2. (2 балла)

1. Дана функция $f(x) = -x^2 + 4x - 2$. Решите уравнение $f(f(\ldots f(x)\ldots) = 2$. Функция f применяется 2018 раз.

Ответ: 2

2. Дана функция $f(x) = 2x^2 - 12x + 21$. Решите уравнение $f(f(\ldots f(x)\ldots) = 3$. Функция f применяется 2018 раз.

Ответ: 3

3. Дана функция $f(x) = x^2 - 8x + 20$. Решите уравнение $f(f(\ldots f(x)\ldots) = 4$. Функция f применяется 2018 раз.

Ответ: 4

Задача 3. (2 балла)

1. Грани каждого из игральных кубиков одинакового размера пронумерованы натуральными числами от 1 до 6. Из 125 таких кубиков составили кубик $5 \times 5 \times 5$. Какое наибольшее значение может принимать сумма чисел на его поверхности?

Ответ: 840

2. Грани каждого из игральных кубиков одинакового размера пронумерованы натуральными числами от 1 до 6. Из 1000 таких кубиков составили кубик $10 \times 10 \times 10$. Какое наибольшее значение может принимать сумма чисел на его поверхности?

Ответ: 3480

3. Грани каждого из игральных кубиков одинакового размера пронумерованы натуральными числами от 1 до 6. Из 216 таких кубиков составили кубик $6 \times 6 \times 6$. Какое наибольшее значение может принимать сумма чисел на его поверхности?

Ответ: 1224

Задача 4. (3 балла)

1. Найдите многочлен третьей степени со старшим коэффициентом 1, если известно, что три его корня x_1, x_2, x_3 удовлетворяют равенствам: $\alpha = x_1 + x_2$, $\beta = x_1 + x_3$, $\gamma = x_2 + x_3$, где α, β, γ — все корни многочлена $x^3 - 10x^2 + 31x - 29$.

Примеры записи ответа: $x^3 - 2x^2 + 33x - 4$

Знак $\wedge$ обозначает степень. Слагаемые пишите в том же порядке, что и в примере.

Ответ: $x^3 - 5x^2 + 6x - 1$

2. Найдите многочлен третьей степени со старшим коэффициентом 1, если известно, что три его корня x_1, x_2, x_3 удовлетворяют равенствам: $\alpha = x_1 + x_2$, $\beta = x_1 + x_3$, $\gamma = x_2 + x_3$, где α, β, γ — все корни многочлена $x^3 - 12x^2 + 44x - 46$.

Примеры записи ответа: $x^3 - 2x^2 + 33x - 4$

Знак $\wedge$ обозначает степень. Слагаемые пишите в том же порядке, что и в примере.

Ответ: $x^3 - 6x^2 + 8x - 2$

3. Найдите многочлен третьей степени со старшим коэффициентом 1, если известно, что три его корня x_1, x_2, x_3 удовлетворяют равенствам: $\alpha = x_1 + x_2$, $\beta = x_1 + x_3$, $\gamma = x_2 + x_3$, где α, β, γ — все корни многочлена $x^3 - 14x^2 + 58x - 61$.

Примеры записи ответа: $x^3 - 2x^2 + 33x - 4$

Знак $\wedge$ обозначает степень. Слагаемые пишите в том же порядке, что и в примере.

Ответ: $x^3 - 7x^2 + 9x - 2$

Задача 5. (3 балла)

1. Пусть $f(x)$ — возрастающая непрерывная функция, заданная на отрезке $[0;2]$, $g(x)$ — её обратная функция, причём $g(x) > f(x)$ при всех положительных x, для которых обе эти функции определены. Также $f(0) = 0$, $f(2) = 1$.

Площадь подграфика $f(x)$ на отрезке $[0;2]$ равна $\frac{3}{4}$. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиками $f(x)$ и $g(x)$, а также отрезком, соединяющим точки $(1;2)$ и $(2;1)$.

Ответ: 2

2. Пусть $f(x)$ — возрастающая непрерывная функция, заданная на отрезке $[0;3]$, $g(x)$ — её обратная функция, причём $g(x) > f(x)$ при всех положительных x, для которых обе эти функции определены. Также $f(0) = 0$, $f(3) = 1$.

Площадь подграфика $f(x)$ на отрезке $[0;3]$ равна 2. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиками $f(x)$ и $g(x)$, а также отрезком, соединяющим точки $(1;3)$ и $(3;1)$.

Ответ: 3

3. Пусть $f(x)$ — возрастающая непрерывная функция, заданная на отрезке $[0;3]$, $g(x)$ — её обратная функция, причём $g(x) > f(x)$ при всех положительных x, для которых обе эти функции определены. Также $f(0) = 0$, $f(3) = 2$.

Площадь подграфика $f(x)$ на отрезке $[0;3]$ равна 2. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиками $f(x)$ и $g(x)$, а также отрезком, соединяющим точки $(3;2)$ и $(2;3)$.

Ответ: 4,5 | 9/2

Задача 6. (3 балла)

1. Две окружности равного радиуса пересекаются в точках AB. Прямая l, проходящая через точку B, вторично пересекает окружности в точках C и D. Оказалось, что $AD = BD = 5 + 5\sqrt{2}$, а $\angle CAD = 90°$.

Найдите BC.

Ответ: 5

2. Две окружности равного радиуса пересекаются в точках AB. Прямая l, проходящая через точку B, вторично пересекает окружности в точках C и D. Оказалось, что $AD = BD = 10 + 10\sqrt{3}$, а $\angle CAD = 120°$.

Найдите BC.

Ответ: 20

3. Две окружности равного радиуса пересекаются в точках AB. Прямая l, проходящая через точку B, вторично пересекает окружности в точках C и D. Оказалось, что $AD = BD = 12$, а $\angle CAD = 108°$.

Найдите BC.

Ответ: 6

Задача 7. (3 балла)

1. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Какую меньшую часть объёма отделяет от него плоскость, проходящая через середину ребра BC, центр грани CDD_1C_1 и точку X на ребре AA_1 такую, что $AX : A_1X = 1 : 3$?

Ответ дайте в виде правильной дроби, не округляйте.

Пример записи ответа: 13/81

Ответ: 25/96

2. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Какую меньшую часть объёма отделяет от него плоскость, проходящая через середины рёбер AB, BB_1 и A_1D_1?

Ответ дайте в виде правильной дроби, не округляйте.

Пример записи ответа: 13/81

Ответ: 25/144

3. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Какую меньшую часть объёма отделяет от него плоскость, проходящая через середину ребра AD и точки X и Y на ребрах AA_1 и CC_1 такие, что $AX : A_1X = CY : C_1Y = 1 : 7$?

Ответ дайте в виде правильной дроби, не округляйте.

Пример записи ответа: 13/81

Ответ: 25/192

Задача 8. (3 балла)

1. На какую наибольшую степень 5 делится число $7^{1000} - 2^{1000}$? В ответе укажите показатель степени или само число.

Ответ: 4 | 625

2. На какую наибольшую степень 2 делится число $7^{1000} - 3^{1000}$? В ответе укажите показатель степени или само число.

Ответ: 5 | 32

3. На какую наибольшую степень 3 делится число $5^{486} - 2^{486}$? В ответе укажите показатель степени или само число.

Ответ: 6 | 729

Задача 9. (4 балла)

Комментарий: желательно разрешить ко вводу только буквы ABCDabcd

1. Упорядочите эти числа по возрастанию или убыванию:

$A = 9^{9^9}$

$B = 99^9$

$C = (9^9)^9$

$D = 9!^{9!}$

Примеры записи ответа: $ABCD$

Ответ: ADCB | BCDA | adcb | bcda

2. Упорядочите эти числа по возрастанию или убыванию:

$A = 8!^{8!}$

$B = 8^{8^8}$

$C = 8^{88}$

$D = (8^8)^8$

Примеры записи ответа: $ABCD$

Ответ: BACD | DCAB | bacd | dcab

3. Упорядочите эти числа по возрастанию или убыванию:

$A = 77^7$

$B = 7^{77}$

$C = 7^{7^7}$

$D = 7!^{7!}$

Примеры записи ответа: $ABCD$

Ответ: CDBA | ABDC | cdba | abdc

Задача 10. (5 баллов)

1. Одиннадцать девочек стояли напротив одиннадцати мальчиков. Первые девочка и мальчик пошли навстречу друг другу. Когда они встретились, они пожали друг другу руки, после чего развернусь и пошли в обратном направлении. Сразу за первыми девочкой и мальчиком пошли вторые девочка и мальчик, за ними третьи девочка и мальчик и так далее, пока не вышли последние девочка и мальчик. Двое детей жали друг другу руки при встрече, после чего разворачивались и шли в обратном направлении. Какое количество рукопожатий было совершено?

Ответ: 121

2. Двенадцать девочек стояли напротив двенадцати мальчиков. Первые девочка и мальчик пошли навстречу друг другу. Когда они встретились, они пожали друг другу руки, после чего развернусь и пошли в обратном направлении. Сразу за первыми девочкой и мальчиком пошли вторые девочка и мальчик, за ними третьи девочка и мальчик и так далее, пока не вышли последние девочка и мальчик. Двое детей жали друг другу руки при встрече, после чего разворачивались и шли в обратном направлении. Какое количество рукопожатий было совершено?

Ответ: 144

3. Тринадцать девочек стояли напротив тринадцати мальчиков. Первые девочка и мальчик пошли навстречу друг другу. Когда они встретились, они пожали друг другу руки, после чего развернусь и пошли в обратном направлении. Сразу за первыми девочкой и мальчиком пошли вторые девочка и мальчик, за ними третьи девочка и мальчик и так далее, пока не вышли последние девочка и мальчик. Двое детей жали друг другу руки при встрече, после чего разворачивались и шли в обратном направлении. Какое количество рукопожатий было совершено?

Ответ: 169