1 Открытая олимпиада школьников 2018/2019 уч. год

1.1 Задания с решениями заключительного этапа олимпиады

1.1.1 Задания для 11 класса

1 вариант

Задача 1. (2 балла)

Сумма и произведение трёх попарно взаимно простых чисел делятся на 13. Может ли их сумма квадратов также делиться на 13?

Ответ: Нет.

Решение:

Обозначим эти числа за x, y и z. Так как произведение чисел делится на 13, одно из чисел должно делиться на 13. Пусть это число x, тогда из условия взаимной простоты мы получаем, что ни y, ни z не делятся на 13.

Далее, $x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)^2 - 2(xy + xz + yz) = (x + y + z)^2 - 2x(y + z) - 2yz$. Число $(x + y + z)^2 - 2x(y + z)$ делится на 13, а $2yz$ не делится, значит, и всё выражение не может делиться на 13.

Для участников, знакомы с техникой сравнения по модулю, можем предложить также такое решение: поскольку x и $x+y+z$ делятся на 13, $y \equiv -z \pmod{13}$, откуда $x^2+y^2+z^2 \equiv 2y^2 \pmod{13}$. Значит, если сумма квадратов делится на 13, $2y^2$ также должно делиться на 13, а это не верно.

Задача 2. (2 балла)

Существует ли многочлен третьей степени такой, что все его корни положительны, а все корни его производной отрицательны, при условии, что и у многочлена, и у производной, есть хотя бы один единственный корень?

Ответ: Да.

Решение:

Подходит, например, многочлен $(x + 1)^3 - 8$: его единственный корень — это 1, т.к. $x + 1 = 2$, а единственный корень производной это -1.

Задача 3. (3 балла)

Последовательность $\{a_n\}$ задана условиями $a_1 = -1$ и $a_{n+1} = \sum\limits_{k=1}^{n}(a_k + 1)$ при $n \geqslant 1$. Найдите явную формулу этой последовательности.

Ответ: $a_n = 2^{n-2} - 1$ при $a > 1$, $a_1 = -1$

Решение:

Вычитая друг из друга формулы для a_{n+1} и a_n, получаем $a_{n+1} - a_n = a_n + 1$, то есть $a_{n+1} = 2a_n + 1$ для $n > 1$.

Теперь докажем формулу $a_n = 2^{n-2} - 1$ по индукции. База $n = 2$ и, действительно, $a_2 = a_1 + 1 = 0 = 2^0 - 1$.

Далее воспользуемся полученной рекуррентной формулой и убедимся, что если $a_n = 2^{n-2} - 1$, то $a_{n+1} = 2(2^{n-2} - 1) + 1 = 2^{n-1} - 1$.

Задача 4. (3 балла)

Найдите $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$, если известно, что $\sec x - \operatorname{cosec} x = \sqrt{15}$.

Напомним, что $\sec x = 1/\cos x$, а $\operatorname{cosec} x = 1/\sin x$

Ответ: -3 или 5.

Решение:

Воспользуемся следующими формулами: $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = \dfrac{1}{\sin x \cos x}$; $\sec x - \operatorname{cosec} x = \dfrac{\sin x - \cos x}{\sin x \cos x}$.

Введём обозначения: $t = \sin x \cos x$ и $A = \sec x - \operatorname{cosec} x$.

Тогда $A^2 = \dfrac{\cos^2 x - 2\cos x \sin x + \sin^2 x}{t^2} = \dfrac{1-2t}{t^2}$. Составим квадратное уравнение $1 - 2t - t^2A^2 = 0$ и решим его относительное t:

$$t = \frac{-1 \pm \sqrt{1+A^2}}{A^2}.$$

При $A = \sqrt{15}$ получаем $t = -\dfrac{5}{15} = -\dfrac{1}{3}$ и $t = \dfrac{3}{15} = \dfrac{1}{5}$. В ответе получаем обратные к t величины.

Осталось убедиться, что для каждого из полученных значений найдётся x, при котором это значение достигается при данном A.

Действительно, $t = \frac{1}{2}\sin 2x$, поэтому для любого значения $-\frac{1}{2} \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}$ найдётся подходящий x. Далее, A выражается через t с точностью до знака, при этом оба возможных значения A достигаются при данном t: для того, чтобы поменять знак A, достаточно увеличить или уменьшить x на π.

Задача 5. (3 балла)

В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB равна диагонали AC. На меньшей дуге AD описанной окружности треугольника ABD выбрана точка E так, что $AB = AE$. Найдите угол $\angle CED$.

Ответ: $90°$.

Решение:

Из равнобедренности треугольника ABC и параллельности BC и AD получаем $\angle ABC = \angle ACB = \angle CAD = \alpha$.

Пусть прямая BC пересекается с описанной окружностью треугольника ABD в точке F. Тогда $ABFD$ — вписанная, т.е. равнобедренная, трапеция, откуда дуги AB, AE и DF равны. Отсюда $\angle ABE = \angle DBF = \beta$.

$\angle EAD = \angle EBD = \gamma$, так как эти углы опираются на одну дугу.

$\angle ABD = \angle ABE + \angle EBD = \beta + \gamma$.

$\angle EAC = \angle EAD + \angle CAD = \gamma + \alpha$. Значит, в равнобедренном треугольнике EAC выполняется равенство $\angle ACE = \angle AEC = \dfrac{180° - \alpha - \gamma}{2}$.

Кроме того, $\alpha = \angle ABC = \angle ABF = \angle ABD + \angle DBF = 2\beta + \gamma$

$\angle CED = \angle AED - \angle AEC = (180° - \angle ABD) - \dfrac{180° - \alpha - \gamma}{2} = 180° - \beta - \gamma - 90° + \dfrac{2\beta + 2\gamma}{2} = 90°$.

Задача 6. (3 балла)

Сколькими способами можно расставить натуральные числа от 1 до 9 в квадратной таблице 3×3 так, чтобы сумма чисел в каждой строке и в каждом столбце была чётна? (Числа могут повторяться)

Ответ: $6 \cdot 5^6 \cdot 4^3 + 9 \cdot 5^4 \cdot 4^5 + 4^9$.

Решение:

В каждой строке и каждом столбце таблицы может быть либо ноль, либо два нечётных числа, то есть либо одно, либо три чётных. Общее количество чётных чисел — нечётное число от 3 до 9.

Разберём несколько случаев:

1) Всего три чётных числа, то есть по одному в каждой строке и каждом столбце. У нас $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ способов выбрать, где стоят эти числа, 5^6 способов расставить нечётные числа и 4^3 способов расставить чётные.

2) Пять чётных чисел, т.е. они занимают одну строку и один столбец. $3 \cdot 3 = 9$ способов выбрать эти строку и столбец, 5^4 способов расставить нечётные числа и 4^5 способов расставить чётные.

3) Семи чётных чисел быть не может, так как это значит, что нечётных чисел всего два. Они не могут одновременно находиться в одной строке и одном столбце, а значит, какие-то суммы окажутся нечётными.

4) Все числа чётные, в таком случае 4^9 способов.

Итого $6 \cdot 5^6 \cdot 4^3 + 9 \cdot 5^4 \cdot 4^5 + 4^9$.

Задача 7. (4 балла)

Плоскость пересекает рёбра тетраэдра $ABCD$, выходящие из вершины D, и делит их в отношении $5 : 1$ (не обязательно от вершины D). Также эта плоскость пересекает прямые AB и AC в точках E и F. Найдите отношение площадей треугольников AEF и ABC.

Ответ: $1 : 576$ или $625 : 576$.

Решение:

Обозначим точки пересечения плоскости (назовём её α) с рёбрами DA, DB и DC за A', B' и C' соответственно. Если $DA' : A'A = DB' : B'B$, прямые AB и $A'B'$ параллельны, а значит, плоскость α не пересекается с прямой AB. Аналогичные рассуждения проведём для прямой AC. Значит, $DA' : A'A \neq DB' : B'B = DC' : C'C$.

Возможны два варианта. В первом случае $DA' : A'A = B'B : DB' = 5 : 1$. По теореме Менелая получаем $\frac{AE}{EB} \cdot \frac{BB'}{DB'} \cdot \frac{DA'}{A'A} = 1$, откуда $\frac{AE}{EB} = \frac{1}{25}$. При этом точка E оказывается на луче BA за точкой A, откуда $\frac{AE}{AB} = \frac{1}{24}$. Аналогично $\frac{AF}{AC} = \frac{1}{24}$ и отношение площадей равно $1 : 576$ (т.к. у искомых треугольников равны углы при вершине A).

Во втором случае $DA' : A'A = B'B : DB' = 1 : 5$. По теореме Менелая получаем $\frac{AE}{EB} \cdot \frac{BB'}{DB'} \cdot \frac{DA'}{A'A} = 1$, откуда $\frac{AE}{EB} = 25$. При этом точка E оказывается на луче AB за точкой B, откуда $\frac{AE}{AB} = \frac{25}{24}$. Аналогично $\frac{AF}{AC} = \frac{25}{24}$ и отношение площадей равно $625 : 576$.

Задача 8. (5 баллов)

Девочка Катя не любит число 239. Она выписала несколько различных чисел, ни одно из которых не содержит последовательность цифр 239 (подряд и именно в таком порядке). Докажите, что сумма обратных к этим числам не больше 30000.

Решение:

Количество подходящих $3n+1$-значных чисел не больше, чем $9 \cdot 999^n$: 9 вариантов для первой цифры и не более 999 вариантов для каждой следующей тройки цифр. Каждое из них не меньше 10^{3n}.

Количество подходящих $3n+2$-значных чисел не больше, чем $90 \cdot 999^n$. Каждое из них не меньше 10^{3n+1}.

Количество подходящих $3n+3$-значных чисел не больше, чем $899 \cdot 999^n$. Каждое из них не меньше 10^{3n+2}.

Пусть количество знаков в самом большом выписанном числе не превосходит $3N+3$. Тогда общая сумма чисел не больше

$$\sum_{n=0}^{N} \left(\frac{9 \cdot 999^n}{1000^n} + \frac{90 \cdot 999^n}{10 \cdot 1000^n} + \frac{899 \cdot 999^n}{100 \cdot 1000^n} \right) = (9+9+8,99) \sum_{n=0}^{N} \left(\frac{999^n}{1000^n} \right) \leqslant 30 \cdot \frac{1}{1-0,999} = 30000.$$

2 вариант

Задача 1. (2 балла)

Сумма и произведение трёх попарно взаимно простых чисел делятся на 11. Может ли их сумма квадратов также делиться на 11?

Ответ: Нет.

Решение:

Обозначим эти числа за x, y и z. Так как произведение чисел делится на 11, одно из чисел должно делиться на 11. Пусть это число x, тогда из условия взаимной простоты мы получаем, что ни y, ни z не делятся на 11.

Далее, $x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)^2 - 2(xy + xz + yz) = (x + y + z)^2 - 2x(y + z) - 2yz$. Число $(x+y+z)^2 - 2x(y+z)$ делится на 11, а $2yz$ не делится, значит, и всё выражение не может делиться на 11.

Для участников, знакомы с техникой сравнения по модулю, можем предложить также такое решение: поскольку x и $x+y+z$ делятся на 11, $y \equiv -z \pmod{11}$, откуда $x^2+y^2+z^2 \equiv 2y^2 \pmod{11}$. Значит, если сумма квадратов делится на 11, $2y^2$ также должно делиться на 11, а это не верно.

Задача 2. (2 балла)

Существует ли многочлен пятой степени такой, что все его корни отрицательны, а все корни его производной положительны, при условии, что и у многочлена, и у производной, есть хотя бы один единственный корень?

Ответ: Да.

Решение:

Подходит, например, многочлен $(x-1)^5 + 32$: его единственный корень — это -1, т.к. $x - 1 = -2$, а единственный корень производной — это 1.

Задача 3. (3 балла)

Последовательность $\{a_n\}$ задана условиями $a_1 = 1$ и $a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + n$ при $n \geqslant 2$. Найдите явную формулу этой последовательности.

Ответ: $a_n = 2^n - 1$

Решение:

Вычитая друг из друга формулы для a_{n+1} и a_n, получаем $a_{n+1} - a_n = a_n + 1$, то есть $a_{n+1} = 2a_n + 1$ для $n > 1$.

Теперь докажем формулу $a_n = 2^n - 1$ по индукции. База $n = 1$ и, действительно, $a_1 = 1 = 2^1 - 1$.

Далее воспользуемся полученной рекуррентной формулой и убедимся, что если $a_n = 2^n - 1$, то $a_{n+1} = 2(2^n - 1) + 1 = 2^{n+1} - 1$.

Задача 4. (3 балла)

Найдите $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$, если известно, что $\sec x - \operatorname{cosec} x = 4\sqrt{3}$.

Напомним, что $\sec x = 1/\cos x$, а $\operatorname{cosec} x = 1/\sin x$

Ответ: -6 или 8.

Решение:

Воспользуемся следующими формулами: $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = \dfrac{1}{\sin x \cos x}$; $\sec x - \operatorname{cosec} x = \dfrac{\sin x - \cos x}{\sin x \cos x}$.

Введём обозначения: $t = \sin x \cos x$ и $A = \sec x - \operatorname{cosec} x$.

Тогда $A^2 = \dfrac{\cos^2 x - 2\cos x \sin x + \sin^2 x}{t^2} = \dfrac{1-2t}{t^2}$. Составим квадратное уравнение $1 - 2t - t^2A^2 = 0$ и решим его относительное t:

$$t = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + A^2}}{A^2}.$$

При $A = 4\sqrt{3} = \sqrt{48}$ получаем $t = -\dfrac{8}{48} = -\dfrac{1}{6}$ и $t = \dfrac{6}{48} = \dfrac{1}{8}$. В ответе получаем обратные к t величины.

Осталось убедиться, что для каждого из полученных значений найдётся x, при котором это значение достигается при данном A.

Действительно, $t = \frac{1}{2}\sin 2x$, поэтому для любого значения $-\frac{1}{2} \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}$ найдётся подходящий x. Далее, A выражается через t с точностью до знака, при этом оба возможных значения A достигаются при данном t: для того, чтобы поменять знак A, достаточно увеличить или уменьшить x на π.

Задача 5. (3 балла)

В трапеции $ABCD$ боковая сторона BC равна диагонали BD. На меньшей дуге AB описанной окружности треугольника ABC выбрана точка E так, что $BC = BE$. Найдите угол $\angle AED$.

Ответ: 90°.

Решение:

Из равнобедренности треугольника BCD и параллельности AB и CD получаем $\angle BCD = \angle BDC = \angle DBA = \alpha$.

Пусть прямая CD пересекается с описанной окружностью треугольника ABC в точке F. Тогда $BCFA$ — вписанная, т.е. равнобедренная, трапеция, откуда дуги BC, BE и AF равны. Отсюда $\angle BCE = \angle ACF = \beta$.

$\angle EBA = \angle ECA = \gamma$, так как эти углы опираются на одну дугу.

$\angle BCA = \angle BCE + \angle ECA = \beta + \gamma$.

$\angle EBD = \angle EBA + \angle DBA = \gamma + \alpha$. Значит, в равнобедренном треугольнике EBD выполняется равенство $\angle BDE = \angle BED = \dfrac{180^\circ - \alpha - \gamma}{2}$.

Кроме того, $\alpha = \angle BCD = \angle BCF = \angle BCA + \angle ACF = 2\beta + \gamma$

$\angle AED = \angle BEA - \angle BED = (180^\circ - \angle BCA) - \dfrac{180^\circ - \alpha - \gamma}{2} = 180^\circ - \beta - \gamma - 90^\circ + \dfrac{2\beta + 2\gamma}{2} = 90^\circ$.

Задача 6. (3 балла)

Сколькими способами можно расставить натуральные числа от 1 до 7 в квадратной таблице 3×3 так, чтобы сумма чисел в каждой строке и в каждом столбце была нечётна? (Числа могут повторяться)

Ответ: $6 \cdot 3^6 \cdot 4^3 + 9 \cdot 3^4 \cdot 4^5 + 4^9$.

Решение:

В каждой строке и каждом столбце таблицы может быть либо одно, либо три нечётных числа. Общее количество нечётных чисел — нечётное число от 3 до 9.

Разберём несколько случаев:

1) Всего три нечётных числа, то есть по одному в каждой строке и каждом столбце. У нас $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ способов выбрать, где стоят эти числа, 3^6 способов расставить чётные числа и 4^3 способов расставить нечётные.

2) Пять нечётных чисел, т.е. они занимают одну строку и один столбец. $3 \cdot 3 = 9$ способов выбрать эти строку и столбец, 3^4 способов расставить чётные числа и 4^5 способов расставить нечётные.

3) Семи нечётных чисел быть не может, так как это значит, что чётных чисел всего два. Они не могут одновременно находиться в одной строке и одном столбце, а значит, какие-то суммы окажутся чётными.

4) Все числа нечётные, в таком случае 4^9 способов.

Итого $6 \cdot 3^6 \cdot 4^3 + 9 \cdot 3^4 \cdot 4^5 + 4^9$.

Задача 7. (4 балла)

Плоскость пересекает рёбра тетраэдра $ABCD$, выходящие из вершины C, и делит их в отношении $4:1$ (не обязательно от вершины C). Также эта плоскость пересекает прямые AB и BD в точках E и F. Найдите отношение площадей треугольников BEF и ABD.

Ответ: $1:225$ или $256:225$.

Решение:

Обозначим точки пересечения плоскости (назовём её α) с рёбрами CA, CB и CD за A', B' и D' соответственно. Если $CA' : A'A = CB' : B'B$, прямые AB и $A'B'$ параллельны, а значит, плоскость α не пересекается с прямой AB. Аналогичные рассуждения проведём для прямой BD. Значит, $CB' : B'B \neq CA' : A'A = CD' : D'D$.

Возможны два варианта. В первом случае $CB' : B'B = A'A : A'C = 4:1$. По теореме Менелая получаем $\frac{BE}{EA} \cdot \frac{AA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'B} = 1$, откуда $\frac{BE}{EA} = \frac{1}{16}$. При этом точка E оказывается на луче AB за точкой B, откуда $\frac{BE}{AB} = \frac{1}{15}$. Аналогично $\frac{BF}{BD} = \frac{1}{15}$ и отношение площадей равно $1:225$ (т.к. у искомых треугольников равны углы при вершине B).

Во втором случае $CB' : B'B = A'A : A'C = 1:4$. По теореме Менелая получаем $\frac{BE}{EA} \cdot \frac{AA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'B} = 1$, откуда $\frac{BE}{EA} = 16$. При этом точка E оказывается на луче BA за точкой A, откуда $\frac{BE}{AB} = \frac{16}{15}$. Аналогично $\frac{BF}{BD} = \frac{16}{15}$ и отношение площадей равно $256:225$ (т.к. у искомых треугольников равны углы при вершине B).

Задача 8. (5 баллов)

Мальчик Коля не любит число 1234. Он выписал несколько различных чисел, ни одно из которых не содержит последовательность цифр 1234 (подряд и именно в таком порядке). Докажите, что сумма обратных к этим числам не больше 400000.

Решение:

Количество подходящих $4n+1$-значных чисел не больше, чем $9 \cdot 9999^n$: 9 вариантов для первой цифры и не более 9999 вариантов для каждой следующей четвёрки цифр. Каждое из них не меньше 10^{4n}.

Количество подходящих $4n+2$-значных чисел не больше, чем $90 \cdot 9999^n$. Каждое из них не меньше 10^{4n+1}.

Количество подходящих $4n+3$-значных чисел не больше, чем $900 \cdot 9999^n$. Каждое из них не меньше 10^{4n+2}.

Количество подходящих $4n+4$-значных чисел не больше, чем $8999 \cdot 9999^n$. Каждое из них не меньше 10^{4n+3}.

Пусть количество знаков в самом большом выписанном числе не превосходит $4N+4$. Тогда общая сумма чисел не больше $\sum\limits_{n=0}^{N} \left(\frac{9 \cdot 9999^n}{10000^n} + \frac{90 \cdot 9999^n}{10 \cdot 10000^n} + \frac{900 \cdot 9999^n}{100 \cdot 10000^n} + \frac{8999 \cdot 9999^n}{1000 \cdot 10000^n} \right)$

$= (9+9+9+8,999) \sum\limits_{n=0}^{N} \left(\frac{9999^n}{10000^n} \right) \leqslant 40 \cdot \frac{1}{1-0,9999} = 400000.$

3 вариант

Задача 1. (2 балла)

Сумма и произведение трёх попарно взаимно простых чисел делятся на 7. Может ли их сумма квадратов также делиться на 7?

Ответ: Нет.

Решение:

Обозначим эти числа за x, y и z. Так как произведение чисел делится на 7, одно из чисел должно делиться на 7. Пусть это число x, тогда из условия взаимной простоты мы получаем, что ни y, ни z не делятся на 7.

Далее, $x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)^2 - 2(xy + xz + yz) = (x + y + z)^2 - 2x(y + z) - 2yz$. Число $(x + y + z)^2 - 2x(y + z)$ делится на 7, а $2yz$ не делится, значит, и всё выражение не может делиться на 7.

Для участников, знакомы с техникой сравнения по модулю, можем предложить также такое решение: поскольку x и $x+y+z$ делятся на 7, $y \equiv -z \pmod 7$, откуда $x^2+y^2+z^2 \equiv 2y^2 \pmod 7$. Значит, если сумма квадратов делится на 7, $2y^2$ также должно делиться на 7, а это не верно.

Задача 2. (2 балла)

Существует ли многочлен третьей степени такой, что все его корни положительны, а все корни его производной отрицательны, при условии, что и у многочлена, и у производной, есть хотя бы один единственный корень?

Ответ: Да.

Решение:

Подходит, например, многочлен $(x + 1)^3 - 8$: его единственный корень — это 1, т.к. $x + 1 = 2$, а единственный корень производной это -1.

Задача 3. (3 балла)

Последовательность $\{a_n\}$ задана условиями $a_1 = 0$ и $a_{n+1} = \sum\limits_{k=1}^{n}(a_k + 1)$ при $n \geqslant 1$. Найдите явную формулу этой последовательности.

Ответ: $a_n = 2^{n-1} - 1$

Решение:

Вычитая друг из друга формулы для a_{n+1} и a_n, получаем $a_{n+1} - a_n = a_n + 1$, то есть $a_{n+1} = 2a_n + 1$ для $n > 1$.

Теперь докажем формулу $a_n = 2^{n-1} - 1$ по индукции. База $n = 1$ и, действительно, $a_1 = 0 = 2^0 - 1$.

Далее воспользуемся полученной рекуррентной формулой и убедимся, что если $a_n = 2^{n-1} - 1$, то $a_{n+1} = 2(2^{n-1} - 1) + 1 = 2^n - 1$.

Задача 4. (3 балла)

Найдите $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$, если известно, что $\sec x - \operatorname{cosec} x = \sqrt{35}$.

Напомним, что $\sec x = 1/\cos x$, а $\operatorname{cosec} x = 1/\sin x$

Ответ: -5 или 7.

Решение:

Воспользуемся следующими формулами: $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = \dfrac{1}{\sin x \cos x}$; $\sec x - \operatorname{cosec} x = \dfrac{\sin x - \cos x}{\sin x \cos x}$.

Введём обозначения: $t = \sin x \cos x$ и $A = \sec x - \operatorname{cosec} x$.

Тогда $A^2 = \dfrac{\cos^2 x - 2\cos x \sin x + \sin^2 x}{t^2} = \dfrac{1-2t}{t^2}$. Составим квадратное уравнение $1 - 2t - t^2A^2 = 0$ и решим его относительное t:

$$t = \frac{-1 \pm \sqrt{1+A^2}}{A^2}.$$

При $A = \sqrt{35}$ получаем $t = -\dfrac{7}{35} = -\dfrac{1}{5}$ и $t = \dfrac{5}{35} = \dfrac{1}{7}$. В ответе получаем обратные к t величины.

Осталось убедиться, что для каждого из полученных значений найдётся x, при котором это значение достигается при данном A.

Действительно, $t = \frac{1}{2}\sin 2x$, поэтому для любого значения $-\frac{1}{2} \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}$ найдётся подходящий x. Далее, A выражается через t с точностью до знака, при этом оба возможных значения A достигаются при данном t: для того, чтобы поменять знак A, достаточно увеличить или уменьшить x на π.

Задача 5. (3 балла)

В трапеции $ABCD$ боковая сторона CD равна диагонали AC. На меньшей дуге BC описанной окружности треугольника BCD выбрана точка E так, что $CD = CE$. Найдите угол $\angle AEB$.

Ответ: $90°$.

Решение:

Из равнобедренности треугольника ACD и параллельности BC и AD получаем $\angle ADC = \angle CAD = \angle ACB = \alpha$.

Пусть прямая AD пересекается с описанной окружностью треугольника BCD в точке F. Тогда $CDFB$ — вписанная, т.е. равнобедренная, трапеция, откуда дуги CD, CE и BF равны. Отсюда $\angle CDE = \angle BDF = \beta$.

$\angle ECB = \angle EDB = \gamma$, так как эти углы опираются на одну дугу.

$\angle CDB = \angle CDE + \angle EDB = \beta + \gamma$.

$\angle ECA = \angle ECB + \angle ACB = \alpha + \gamma$. Значит, в равнобедренном треугольнике ECA выполняется равенство $\angle CAE = \angle AEC = \dfrac{180° - \alpha - \gamma}{2}$.

Кроме того, $\alpha = \angle ADC = \angle CDF = \angle CDB + \angle BDF = 2\beta + \gamma$

$\angle AEB = \angle CEB - \angle AEC = (180° - \angle CDB) - \dfrac{180° - \alpha - \gamma}{2} = 180° - \beta - \gamma - 90° + \dfrac{2\beta + 2\gamma}{2} = 90°$.

Задача 6. (3 балла)

Сколькими способами можно расставить натуральные числа от 1 до 13 в квадратной таблице 3×3 так, чтобы сумма чисел в каждой строке и в каждом столбце была чётна? (Числа могут повторяться)

Ответ: Итого $6 \cdot 7^6 \cdot 6^3 + 9 \cdot 7^4 \cdot 6^5 + 6^9$.

Решение:

В каждой строке и каждом столбце таблицы может быть либо ноль, либо два нечётных числа, то есть либо одно, либо три чётных. Общее количество чётных чисел — нечётное число от 3 до 9.

Разберём несколько случаев:

1) Всего три чётных числа, то есть по одному в каждой строке и каждом столбце. У нас $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ способов выбрать, где стоят эти числа, 7^6 способов расставить нечётные числа и 6^3 способов расставить чётные.

2) Пять чётных чисел, т.е. они занимают одну строку и один столбец. $3 \cdot 3 = 9$ способов выбрать эти строку и столбец, 7^4 способов расставить нечётные числа и 6^5 способов расставить чётные.

3) Семи чётных чисел быть не может, так как это значит, что нечётных чисел всего два. Они не могут одновременно находиться в одной строке и одном столбце, а значит, какие-то суммы окажутся нечётными.

4) Все числа чётные, в таком случае 6^9 способов.

Итого $6 \cdot 7^6 \cdot 6^3 + 9 \cdot 7^4 \cdot 6^5 + 6^9$.

Задача 7. (4 балла)

Плоскость пересекает рёбра тетраэдра $ABCD$, выходящие из вершины B, и делит их в отношении $2:1$ (не обязательно от вершины B). Также эта плоскость пересекает прямые CD и AC в точках E и F. Найдите отношение площадей треугольников EFC и ACD.

Ответ: $1:9$ или $16:9$.

Решение:

Обозначим точки пересечения плоскости (назовём её α) с рёбрами BA, BC и BD за A', C' и D' соответственно. Если $BA' : A'A = BC' : C'C$, прямые AC и $A'C'$ параллельны, а значит, плоскость α не пересекается с прямой AC. Аналогичные рассуждения проведём для прямой CD. Значит, $BC' : C'C \neq BA' : A'A = BD' : D'D$.

Возможны два варианта. В первом случае $BC' : C'C = D'D : D'B = 2:1$. По теореме Менелая получаем $\frac{CE}{ED} \cdot \frac{DD'}{D'B} \cdot \frac{BC'}{C'C} = 1$, откуда $\frac{CE}{ED} = \frac{1}{4}$. При этом точка E оказывается на луче DC за точкой C, откуда $\frac{CE}{CD} = \frac{1}{3}$. Аналогично $\frac{CF}{CA} = \frac{1}{3}$ и отношение площадей равно $1:9$ (т.к. у искомых треугольников равны углы при вершине C).

Во втором случае $BC' : C'C = D'D : D'B = 1:2$. По теореме Менелая получаем $\frac{CE}{ED} \cdot \frac{DD'}{D'B} \cdot \frac{BC'}{C'C} = 1$, откуда $\frac{CE}{ED} = \frac{4}{1}$. При этом точка E оказывается на луче CD за точкой D, откуда $\frac{CE}{CD} = \frac{4}{3}$. Аналогично $\frac{CF}{CA} = \frac{4}{3}$ и отношение площадей равно $16:9$ (т.к. у искомых треугольников равны углы при вершине C).

Задача 8. (5 баллов)

Девочка Маша не любит число 729. Она выписала несколько различных чисел, ни одно из которых не содержит последовательность цифр 729 (подряд и именно в таком порядке). Докажите, что сумма обратных к этим числам не больше 30000.

Решение:

Количество подходящих $3n+1$-значных чисел не больше, чем $9 \cdot 999^n$: 9 вариантов для первой цифры и не более 999 вариантов для каждой следующей тройки цифр. Каждое из них не меньше 10^{3n}.

Количество подходящих $3n+2$-значных чисел не больше, чем $90 \cdot 999^n$. Каждое из них не меньше 10^{3n+1}.

Количество подходящих $3n+3$-значных чисел не больше, чем $899 \cdot 999^n$. Каждое из них не меньше 10^{3n+2}.

Пусть количество знаков в самом большом выписанном числе не превосходит $3N+3$. Тогда общая сумма чисел не больше

$$\sum_{n=0}^{N} \left(\frac{9 \cdot 999^n}{1000^n} + \frac{90 \cdot 999^n}{10 \cdot 1000^n} + \frac{899 \cdot 999^n}{100 \cdot 1000^n} \right) = (9+9+8,99) \sum_{n=0}^{N} \left(\frac{999^n}{1000^n} \right) \leqslant 30 \cdot \frac{1}{1-0,999} = 30000.$$

4 вариант

Задача 1. (2 балла)

Сумма и произведение трёх попарно взаимно простых чисел делятся на 17. Может ли их сумма квадратов также делиться на 17?

Ответ: Нет.

Решение:

Обозначим эти числа за x, y и z. Так как произведение чисел делится на 17, одно из чисел должно делиться на 17. Пусть это число x, тогда из условия взаимной простоты мы получаем, что ни y, ни z не делятся на 17.

Далее, $x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)^2 - 2(xy + xz + yz) = (x + y + z)^2 - 2x(y + z) - 2yz$. Число $(x+y+z)^2 - 2x(y+z)$ делится на 17, а $2yz$ не делится, значит, и всё выражение не может делиться на 17.

Для участников, знакомы с техникой сравнения по модулю, можем предложить также такое решение: поскольку x и $x+y+z$ делятся на 17, $y \equiv -z \pmod{17}$, откуда $x^2+y^2+z^2 \equiv 2y^2 \pmod{17}$. Значит, если сумма квадратов делится на 17, $2y^2$ также должно делиться на 17, а это не верно.

Задача 2. (2 балла)

Существует ли многочлен пятой степени такой, что все его корни отрицательны, а все корни его производной положительны, при условии, что и у многочлена, и у производной, есть хотя бы один единственный корень?

Ответ: Да.

Решение:

Подходит, например, многочлен $(x - 1)^5 + 32$: его единственный корень — это -1, т.к. $x - 1 = -2$, а единственный корень производной — это 1.

Задача 3. (3 балла)

Последовательность $\{a_n\}$ задана условиями $a_1 = 2$ и $a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + n$ при $n \geqslant 2$. Найдите явную формулу этой последовательности.

Ответ: $a_n = 5 \cdot 2^{n-2} - 1$ при $a > 1$, $a_1 = 2$

Решение:

Вычитая друг из друга формулы для a_{n+1} и a_n, получаем $a_{n+1} - a_n = a_n + 1$, то есть $a_{n+1} = 2a_n + 1$ для $n > 1$.

Теперь докажем формулу $a_n = 5 \cdot 2^{n-2} - 1$ по индукции. База $n = 2$ и, действительно, $a_2 = a_1 + 2 = 4 = 5 \cdot 2^0 - 1$.

Далее воспользуемся полученной рекуррентной формулой и убедимся, что если $a_n = 5 \cdot 2^{n-2} - 1$, то $a_{n+1} = 2(5 \cdot 2^{n-2} - 1) + 1 = 5 \cdot 2^{n-1} - 1$.

Задача 4. (3 балла)

Найдите $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$, если известно, что $\sec x - \operatorname{cosec} x = 2\sqrt{6}$.

Напомним, что $\sec x = 1/\cos x$, а $\operatorname{cosec} x = 1/\sin x$

Ответ: -4 или 6.

Решение:

Воспользуемся следующими формулами: $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = \dfrac{1}{\sin x \cos x}$; $\sec x - \operatorname{cosec} x = \dfrac{\sin x - \cos x}{\sin x \cos x}$.

Введём обозначения: $t = \sin x \cos x$ и $A = \sec x - \operatorname{cosec} x$.

Тогда $A^2 = \dfrac{\cos^2 x - 2\cos x \sin x + \sin^2 x}{t^2} = \dfrac{1-2t}{t^2}$. Составим квадратное уравнение $1 - 2t - t^2A^2 = 0$ и решим его относительное t:

$$t = \frac{-1 \pm \sqrt{1+A^2}}{A^2}.$$

При $A = 2\sqrt{6} = \sqrt{24}$ получаем $t = -\dfrac{6}{24} = -\dfrac{1}{4}$ и $t = \dfrac{4}{24} = \dfrac{1}{6}$. В ответе получаем обратные к t величины.

Осталось убедиться, что для каждого из полученных значений найдётся x, при котором это значение достигается при данном A.

Действительно, $t = \frac{1}{2}\sin 2x$, поэтому для любого значения $-\frac{1}{2} \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}$ найдётся подходящий x. Далее, A выражается через t с точностью до знака, при этом оба возможных значения A достигаются при данном t: для того, чтобы поменять знак A, достаточно увеличить или уменьшить x на π.

Задача 5. (3 балла)

В трапеции $ABCD$ боковая сторона AD равна диагонали BD. На меньшей дуге CD описанной окружности треугольника ACD выбрана точка E так, что $AD = DE$. Найдите угол $\angle BEC$.

Ответ: 90°.

Решение:

Из равнобедренности треугольника BAD и параллельности AB и CD получаем $\angle BAD = \angle DBA = \angle BDC = \alpha$.

Пусть прямая AB пересекается с описанной окружностью треугольника ACD в точке F. Тогда $DAFC$ — вписанная, т.е. равнобедренная, трапеция, откуда дуги DA, DE и CF равны. Отсюда $\angle DAE = \angle CAF = \beta$.

$\angle EDC = \angle EAC = \gamma$, так как эти углы опираются на одну дугу.

$\angle DAC = \angle DAE + \angle EAC = \beta + \gamma$.

$\angle EDB = \angle EDC + \angle BDC = \gamma + \alpha$. Значит, в равнобедренном треугольнике EBD выполняется равенство $\angle DBE = \angle BED = \dfrac{180^\circ - \alpha - \gamma}{2}$.

Кроме того, $\alpha = \angle BAD = \angle DAF = \angle DAC + \angle CAF = 2\beta + \gamma$

$\angle BEC = \angle DEC - \angle DEB = (180^\circ - \angle DAC) - \dfrac{180^\circ - \alpha - \gamma}{2} = 180^\circ - \beta - \gamma - 90^\circ + \dfrac{2\beta + 2\gamma}{2} = 90^\circ$.

Задача 6. (3 балла)

Сколькими способами можно расставить натуральные числа от 1 до 9 в квадратной таблице 3×3 так, чтобы сумма чисел в каждой строке и в каждом столбце была нечётна? (Числа могут повторяться)

Ответ: $6 \cdot 4^6 \cdot 5^3 + 9 \cdot 4^4 \cdot 5^5 + 5^9$.

Решение:

В каждой строке и каждом столбце таблицы может быть либо одно, либо три нечётных числа. Общее количество нечётных чисел — нечётное число от 3 до 9.

Разберём несколько случаев:

1) Всего три нечётных числа, то есть по одному в каждой строке и каждом столбце. У нас $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ способов выбрать, где стоят эти числа, 4^6 способов расставить чётные числа и 5^3 способов расставить нечётные.

2) Пять нечётных чисел, т.е. они занимают одну строку и один столбец. $3 \cdot 3 = 9$ способов выбрать эти строку и столбец, 4^4 способов расставить чётные числа и 5^5 способов расставить нечётные.

3) Семи нечётных чисел быть не может, так как это значит, что чётных чисел всего два. Они не могут одновременно находиться в одной строке и одном столбце, а значит, какие-то суммы окажутся чётными.

4) Все числа нечётные, в таком случае 5^9 способов.

Итого $6 \cdot 4^6 \cdot 5^3 + 9 \cdot 4^4 \cdot 5^5 + 5^9$.

Задача 7. (4 балла)

Плоскость пересекает рёбра тетраэдра $ABCD$, выходящие из вершины A, и делит их в отношении $3:1$ (не обязательно от вершины A). Также эта плоскость пересекает прямые BC и CD в точках E и F. Найдите отношение площадей треугольников EFC и BCD.

Ответ: $1:64$ или $81:64$.

Решение:

Обозначим точки пересечения плоскости (назовём её α) с рёбрами AB, AC и AD за B', C' и D' соответственно. Если $AB' : B'B = AC' : C'C$, прямые BC и $B'C'$ параллельны, а значит, плоскость α не пересекается с прямой BC. Аналогичные рассуждения проведём для прямой CD. Значит, $AC' : C'C \neq AB' : B'B = AD' : D'D$.

Возможны два варианта. В первом случае $AC' : C'C = B'B : B'A = 1 : 3$. По теореме Менелая получаем $\frac{BE}{EC} \cdot \frac{CC'}{C'A} \cdot \frac{AB'}{B'B} = 1$, откуда $\frac{BE}{EC} = \frac{1}{9}$. При этом точка E оказывается на луче CB за точкой B, откуда $\frac{BC}{CE} = \frac{8}{9}$. Аналогично $\frac{CD}{CF} = \frac{8}{9}$ и отношение площадей равно $81 : 64$ (т.к. у искомых треугольников равны углы при вершине C).

Во втором случае $AC' : C'C = B'B : B'A = 3 : 1$. По теореме Менелая получаем $\frac{BE}{EC} \cdot \frac{CC'}{C'A} \cdot \frac{AB'}{B'B} = 1$, откуда $\frac{BE}{EC} = 9$. При этом точка E оказывается на луче BC за точкой C, откуда $\frac{BC}{CE} = 8$. Аналогично $\frac{CD}{CF} = 8$ и отношение площадей равно $1 : 64$ (т.к. у искомых треугольников равны углы при вершине C).

Задача 8. (5 баллов)

Мальчик Антон не любит число 2048. Он выписал несколько различных чисел, ни одно из которых не содержит последовательность цифр 2048 (подряд и именно в таком порядке). Докажите, что сумма обратных к этим числам не больше 400000.

Решение:

Количество подходящих $4n+1$-значных чисел не больше, чем $9 \cdot 9999^n$: 9 вариантов для первой цифры и не более 9999 вариантов для каждой следующей четвёрки цифр. Каждое из них не меньше 10^{4n}.

Количество подходящих $4n+2$-значных чисел не больше, чем $90 \cdot 9999^n$. Каждое из них не меньше 10^{4n+1}.

Количество подходящих $4n+3$-значных чисел не больше, чем $900 \cdot 9999^n$. Каждое из них не меньше 10^{4n+2}.

Количество подходящих $4n+4$-значных чисел не больше, чем $8999 \cdot 9999^n$. Каждое из них не меньше 10^{4n+3}.

Пусть количество знаков в самом большом выписанном числе не превосходит $4N+4$. Тогда общая сумма чисел не больше $\sum\limits_{n=0}^{N} \left(\frac{9 \cdot 9999^n}{10000^n} + \frac{90 \cdot 9999^n}{10 \cdot 10000^n} + \frac{900 \cdot 9999^n}{100 \cdot 10000^n} + \frac{8999 \cdot 9999^n}{1000 \cdot 10000^n} \right)$

$$= (9+9+9+8,999) \sum_{n=0}^{N} \left(\frac{9999^n}{10000^n} \right) \leqslant 40 \cdot \frac{1}{1-0,9999} = 400000.$$

1.1.6 Критерии оценивания решений задач заключительного этапа

11 класс

1. (2 балла)

Только ответ “Нет” — *0 баллов.*

Утверждение о том, что делящееся на p (т.е. на 13, 11, 7 или 17, в зависимости от варианта) число единственно и обозначение его за отдельную букву — *0,5 балла.*

Вывод того, что (в обозначениях авторского решения) yz или $2y^2$ делится на p (без указания на противоречие или то, что из этого немедленно следует решение задачи — маловероятно, но вдруг участник запутается). — *ещё 1 балл, т.е. всего 1,5 балла.*

Несущественные алгебраические продвижения, например, доказательство того, что $y+z$ делится на p не оцениваются.

2. (2 балла)

Только ответ “Да” — *0 баллов.*

Пример участника не обязан совпадать с примером из авторского решения.

Пример без пояснений (например, без указания, какие именно корни у многочлена и производной или почему они положительны/отрицательны) — *не более 1 балла.*

Решения с верным примером и недостаточно подробными пояснениями могут быть оценены в *1 или 1,5 балла*, однако не стоит слишком придираться: если участник утверждает, что, многочлен имеет такой-то корень и это действительно очевидно, снимать за это не надо.

3. (3 балла)

Сформулирована и доказана рекуррентная формула — *1 балл.*

Только ответ без обоснования — *0,5 балла.*

В целях обеспечения равноценности вариантов, в случаях где a_1 не укладывается в общую формулу, не снимать баллы за отсутствие упоминания об этом в ответе.

4. (3 балла)

Только ответ — *0 баллов.*

В решении не показано, что оба значения достигаются — *снимать 1 балл.*

Потерян один из ответов — *снимать 1 балл.*

За арифметические ошибки, несущественно влияющие на ход решения, *снимать 0,5 балла* за одну ошибку, *снимать 1 балл* за две ошибки или более.

5. (3 балла)

Только ответ — *0 баллов.*

Идея дополнительного построения, аналогичного точке F в авторском решении — *0,5 балла.*

Выписаны все или почти всего углы, равные α, β, γ — *ещё 0,5 балла.*

Получено равенство $\alpha = 2\beta + \gamma$ — *ещё 0,5 балла.*

6. (3 балла)

Вычислять ответ не требуется, достаточно правильной формулы со степенями.

Утверждение о том, что общее количество N чётных/нечётных чисел (в зависимости от варианта) нечётно или что оно нечётно в каждой строке само по себе не оценивается.

Баллы за авторское решение складываются из шести частей по *0,5 балла* каждая

1) Утверждение о том, что $N > 1$ и нечётно
2) Доказано, что $N \neq 7$
3) Разобран случай $N = 9$, посчитано количество вариантов.
4) Верно описано расположение чётных/нечётных чисел при $N = 5$
5) Верно описано расположение чётных/нечётных чисел при $N = 3$
6) Верно записаны формулы для количества способов при $N = 3$ и $N = 5$.

Только ответ — *0 баллов.*

7. (4 балла)

Разобраны оба случая, не объяснено, почему других нет — *3 балла*

Разобран один случай, не объяснено, почему других нет — *1,5 балла*

Разобран один случай, с обоснованием, из-за ошибки в котором потерян второй случай — *2 балла*

За несущественные арифметические ошибки, приведшие к искажению 1 ответа *снимать 0,5 балла*

За арифметические ошибки, приведшие к искажению обоих ответов (в случае, если разбирались оба случая) *снимать не менее 1 балла*

Только ответ — *0 баллов.*

8. (5 баллов)

За несущественные арифметические ошибки *снимать 1 балл*

Заметим, что оценка не точная, поэтому участник имеет возможность немного “загрубить” неравенство.