

1.2.2 Задания для 10 класса

Задача 1. (2 балла)

1. Дан треугольник со сторонами 10, 10, 12. Найдите расстояние от точки пересечения медиан до ближайшей стороны треугольника.

Ответ: $4/3$

2. Дан треугольник со сторонами 10, 10, 16. Найдите расстояние от точки пересечения медиан до ближайшей стороны треугольника.

Ответ: 2

3. Дан треугольник со сторонами 10, 13, 13. Найдите расстояние от точки пересечения медиан до самой дальней от неё стороны треугольника.

Ответ: 4

Задача 2. (2 балла)

1. Дана дробно-линейная функция вида $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, где a, b, c и d — различные натуральные числа от 1 до 10. Какое наименьшее значение может принимать $f(4)$.

Ответ запишите в виде правильной дроби, не округляйте.

Пример записи ответа: $27/34$

Ответ: $6/49$

2. Дана дробно-линейная функция вида $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, где a, b, c и d — различные натуральные числа от 1 до 15. Какое наименьшее значение может принимать $f(3)$.

Ответ запишите в виде правильной дроби, не округляйте.

Пример записи ответа: $27/34$

Ответ: $5/59$

3. Дана дробно-линейная функция вида $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, где a, b, c и d — различные натуральные числа от 1 до 20. Какое наименьшее значение может принимать $f(2)$.

Ответ запишите в виде правильной дроби, не округляйте.

Пример записи ответа: $27/34$

Ответ: $4/59$

Задача 3. (3 балла)

1. Натуральное число представляется в виде суммы ста степеней двойки. А в виде суммы какого наименьшего числа степеней числа 16 его гарантированно можно представить?

Ответ: 800

2. Натуральное число представляется в виде суммы ста степеней двойки. А в виде суммы какого наименьшего числа степеней числа 32 его гарантированно можно представить?

Ответ: 1600

3. Натуральное число представляется в виде суммы ста степеней тройки. А в виде суммы какого наименьшего числа степеней числа 27 его гарантированно можно представить?

Ответ: 900

Задача 4. (3 балла)

1. Найдите все возможные целые значения выражения $\frac{2}{a} + 5 + \sqrt{2}$, если известно, что $a - \sqrt{2}$ так же целое. Ответы запишите в любом порядке через запятую или точку с запятой.

Примеры записи ответа: 1; 2

Ответ: 3, 7 || 7, 3 || 3; 7 || 7: 3

2. Найдите все возможные целые значения выражения $\frac{6}{a} + 4 + \sqrt{3}$, если известно, что $a - \sqrt{3}$ так же целое.

Ответ: 1, 7 || 7, 1 || 1; 7 || 7: 1

3. Найдите все возможные целые значения выражения $\frac{4}{a} + 3 + \sqrt{5}$, если известно, что $a - \sqrt{5}$ так же целое.

Ответ: $0, 6 \parallel 6, 0 \parallel 0; 6 \parallel 6; 0$

Задача 5. (3 балла)

1. Найдите остаток от деления многочлена $P(x)$ на многочлен $x^2 + 11x + 30$, если известно, что $P(-6) = 2$ и $P(-5) = 1$.

Примеры записи ответа:

$$2x-3$$

$$x+4$$

$$\text{Ответ: } -x - 4 \parallel -4-x$$

2. Найдите остаток от деления многочлена $P(x)$ на многочлен $x^2 + 9x + 20$, если известно, что $P(-5) = 2$ и $P(-4) = 1$.

Примеры записи ответа:

$$2x-3$$

$$x+4$$

$$\text{Ответ: } -x - 3 \parallel -3-x$$

3. Найдите остаток от деления многочлена $P(x)$ на многочлен $x^2 + 7x + 12$, если известно, что $P(-4) = 2$ и $P(-3) = 1$.

Примеры записи ответа:

$$2x-3$$

$$x+4$$

$$\text{Ответ: } -x - 2 \parallel -2-x$$

Задача 6. (3 балла)

1. Сколькими способами из картинки 10×12 можно сделать пазл, если каждые две соседние клетки должны соединяться выступом и выемкой? (Картинка такова, что как бы мы не резали её на части пазла, одинаковых кусочков и кусочков, переходящих в себя при поворотах не будет)

Примеры записи ответа:

$$123456789$$

$$3^{97}$$

$$\text{Ответ: } 2^{218}$$

2. Сколькими способами из картинки 11×12 можно сделать пазл, если каждые две соседние клетки должны соединяться выступом и выемкой? (Картинка такова, что как бы мы не резали её на части пазла, одинаковых кусочков и кусочков, переходящих в себя при поворотах не будет)

Примеры записи ответа:

$$123456789$$

$$3^{97}$$

$$\text{Ответ: } 2^{241}$$

3. Сколькими способами из картинки 10×15 можно сделать пазл, если каждые две соседние клетки должны соединяться выступом и выемкой? (Картинка такова, что как бы мы не резали её на части пазла, одинаковых кусочков и кусочков, переходящих в себя при поворотах не будет)

Примеры записи ответа:

$$123456789$$

$$3^{97}$$

$$\text{Ответ: } 2^{275}$$

Задача 7. (3 балла)

1. Синус, косинус и тангенс некоторого угла образуют геометрическую прогрессию (по определению, знаменатель геометрической прогрессии не равен 0). Какое количество различных значений может принимать синус?

Ответ: 4

2. Синус, косинус и тангенс некоторого угла образуют геометрическую прогрессию (по определению, знаменатель геометрической прогрессии не равен 0). Какое количество различных значений может принимать косинус?

Ответ: 3

3. Синус, косинус и котангенс некоторого угла образуют геометрическую прогрессию (по определению, знаменатель геометрической прогрессии не равен 0). Какое количество различных значений может принимать косинус?

Ответ: 4.

Задача 8. (4 балла)

1. Изначально на доске написано число 1. Разрешается прибавлять к текущему числу 2 или умножать его на 2. Какое наименьшее натуральное число (больше 1) нельзя получить не более, чем за 100 таких операций?

Ответ: 203

2. На доске написано какое-то число. Разрешается прибавлять к текущему числу 3 или умножать его на 3. Какое наименьшее натуральное число (больше 1) нельзя получить не более, чем за 100 таких операций ни из единицы, ни из двойки?

Ответ: 304

3. Изначально на доске написано число 2. Разрешается прибавлять к текущему числу 4 или умножать его на 2. Какое наименьшее чётное натуральное число (больше 2) нельзя получить не более, чем за 100 таких операций?

Ответ: 406

Задача 9. (4 балла)

1. Диагональ AC ромба $ABCD$ со стороной $6\sqrt{5}$ пересекает описанную окружность треугольника ABD в точке X . Оказалось, что $CX = 9$.

Найдите квадрат расстояния между точкой пересечения высот треугольника ABD и центром вписанной окружности треугольника CDB .

Ответ: 45

2. Диагональ AC ромба $ABCD$ со стороной $4\sqrt{17}$ пересекает описанную окружность треугольника ABD в точке X . Оказалось, что $CX = 15$.

Найдите квадрат расстояния между точкой пересечения высот треугольника ABD и центром вписанной окружности треугольника CDB .

Ответ: 17

3. Диагональ AC ромба $ABCD$ со стороной $6\sqrt{10}$ пересекает описанную окружность треугольника ABD в точке X . Оказалось, что $CX = 16$.

Найдите квадрат расстояния между точкой пересечения высот треугольника ABD и центром вписанной окружности треугольника CDB .

Ответ: 40

Задача 10. (4 балла)

1. Дана клетчатая решётка 12×12 . Сколько различных несамопересекающихся замкнутых путей длины 8 можно провести по линиям этой решётки?

Ответ: 845

2. Дана клетчатая решётка 13×13 . Сколько различных несамопересекающихся замкнутых путей длины 8 можно провести по линиям этой решётки?

Ответ: 1006

3. Дана клетчатая решётка 11×11 . Сколько различных несамопересекающихся замкнутых путей длины 8 можно провести по линиям этой решётки?

Ответ: 698