1.1.2 Задания для 10 класса

1 вариант

Задача 1. (2 балла)

В классе у каждого либо 5, либо 6 друзей (дружба взаимна), причём у любых двух друзей разное количество друзей в класса. Какое наименьшее количество учеников, большее 0 может быть в классе?

Ответ: 11

Решение:

Посмотрим на какого-то человека. Пусть у него пять друзей. Тогда у всех этих пяти человек по шесть друзей. Аналогично есть ещё хотя бы 6 человек с пятью друзьями каждый. Всего 11 человек.

Пример довольно легко построить: две группы из 5 и 6 человек, люди из разных групп дружат между собой, а из одной — нет.

Задача 2. (2 балла)

В положительной непостоянной геометрической прогрессии среднее арифметическое второго, седьмого и девятого членов равно какому-то члену этой прогрессии. Какой минимальный номер у него может быть?

Ответ: 3

Решение:

Второй элемент — либо больший, либо меньший из трёх указанных, значит, он не может быть равен среднему арифетическому всех трёх. Первый элемент тем более не подходят.

Для того, чтобы доказать, что ответ "3" возможен, введём обозначения: пусть $b_n = bq^{n-1}$. Тогда надо решить уравнение $3bq^2 = bq + bq^6 + bq^8$. Упрощая его, получаем $q^7 + q^5 - 3q + 1 = 0$.

У этого уравнения есть корень $q = 1$, но он нам не подходит, так как прогрессия непостоянна. $q^7 + q^5 - 3q + 1 = (q-1)(q^6 + q^5 + 2q^4 + 2q^3 + q^2 + 2q - 1)$. Второй множитель при $q = 0$ отрицателен, а при $q = 1$ положителен, значит, у этого выражения есть корень между нулём и единицей. Таким образом, можно подобрать знаменатель прогрессии и взять любое положительное число в качестве первого члена для ответа 3.

Задача 3. (2 балла)

Может ли число $n^{n^n} - 4n^n + 3$ быть простым при натуральном $n > 2$?

Ответ: Нет.

Решение:

Можно заметить, что указанное число всегда делится на $n-1$. Это легко доказывается через формулу разности степеней или пользуясь тем обстоятельством, что $n \equiv 1 \pmod{n-1}$.

При этом частное тоже больше единицы при $n > 2$.

Задача 4. (2 балла)

Сколько отрицательных чисел среди чисел вида $\operatorname{tg}((15^n)^\circ)$, где n — натуральное число от 1 до 2019?

Ответ: 1009

Решение:

$\operatorname{tg} 15^\circ > 0$.

$15^2 = 225$; $\operatorname{tg} 225^\circ > 0$.

Далее, $225 \cdot 15 = 3375$, это число даёт остаток 135 при делении на 360. $\operatorname{tg} 135^\circ < 0$.

$135 \cdot 15 = 2025$, это число даёт остаток 225 при делении на 360. Дальше последовательность остатков при делении на 360 зацикливается, то есть положительные и отрицательные тангенсы будут чередоваться.

Первое число не входит в этот цикл и оно положительно. Среди остальных чисел отрицательных ровно половина, то есть 1009.

Задача 5. (3 балла)

Высота ромба, проведенная из вершины его тупого угла, делит сторону ромба в отношении 1:3, считая от вершины его острого угла. Какую часть площади ромба составляет площадь вписанного в него круга?

Ответ: $\dfrac{\pi\sqrt{15}}{16}$

Решение:

Задача решается с точностью до подобия, поэтому можно считать, что сторона ромба равна 4. Тогда высота делит её на отрезки 1 и 3.

Высоту ромба можно найти по теореме Пифагора: $\sqrt{4^2 - 1^2} = \sqrt{15}$. Эта же высота является диаметром окружности.

Отсюда получаем отношение площадей: $\dfrac{\left(\frac{\sqrt{15}}{2}\right)^2 \pi}{4\sqrt{15}} = \dfrac{\pi\sqrt{15}}{16}$

Задача 6. (3 балла)

Окружность пересекает все стороны остроугольного треугольника ABC, периметр которого 2. a, b, c — отрезки касательных к этой окружности из вершин A, B и C. Докажите, что $a + b + c \leqslant 1$.

Доказательство:

Из того, что треугольник остроугольный и окружность пересекает его в шести точках, следует, что центр окружности лежит внутри треугольника.

Пусть A' — точка касания касательной, выпущенной из точки A, ближайшей к точке B, O — центр окружности. Пусть X — точка пересечения отрезков AB и OA'. Аналогично B' — точка касания касательной, выпущенной из точки B, ближайшей к точке A, а Y — точка пересечения отрезков AB и OB'. При этом, точки A, X, Y, B находятся на отрезке именно в таком порядке, то есть $AX + YB < AB$.

С другой стороны, треугольник $AA'X$ — прямоугольный с гипотенузой AX, поэтому $AX > AA' = a$. Аналогично $BY > BB' = b$. Отсюда получаем $a + b < AX + BY < AB$.

Аналогично получаем $a + c < AC$ и $b + c < BC$. Таким образом, $a + b + c$ меньше полупериметра треугольника, то есть 1, что и требовалась доказать.

(На самом деле, мы доказали более сильное, строгое неравенство, вместо нестрогого, которое требовалось).

Задача 7. (4 балла)

Можно ли расставить в квадратной таблице 100×100 числа от 0 до 9999 (каждое по одному разу) так, чтобы в каждом квадратике 2×2 сумма чисел была бы одинаковой?

Ответ: Да, можно.

Решение:

Искомая таблица получается как сумма двух таблиц.

Первая таблица выглядит так:

0	99	0	99	0	99	...
0	99	0	99	0	99	...
1	98	1	98	1	98	...
1	98	1	98	1	98	...
2	97	2	97	2	97	...
2	97	2	97	2	97	...
...						
49	50	49	50	49	50	...

В этой таблице любое число, вместе со своим соседним по горизонтали даёт в сумме 99, так что в любом квадрате 2×2 сумма равна 198.

9900	0	9800	100	9700	200	...
0	9900	100	9800	200	9700	...
9900	0	9800	100	9700	200	...
0	9900	100	9800	200	9700	...
9900	0	9800	100	9700	200	...
0	9900	100	9800	200	9700	...
...						

В этой таблице любое число, вместе со своим соседним по вертикали даёт в сумме 9900, так что в любом квадрате 2×2 сумма равна 19800.

При суммировании этих таблиц сумма в каждом квадрате 2×2 будет очевидно составлять 19998.

Осталось понять, что в таблице встретятся все числа.

Рассмотрим расстановку какого-то числа вида $100k$ во второй таблице. Это число расположено в двух соседних столбцах на клетках, которые при шахматной раскраске оказываются одного цвета. При этом в первой таблице в этих двух столбцах встречаются все числа от 0 до 99, причём каждое один раз на чёрной клетке и один раз на белой. Значит, число $100k$ будет просуммировано с каждым числом от 0 до 99 ровно один раз. Таким образом, у нас получатся все числа от $100k$ до $100k + 99$ каждое по разу, а значит, во всей таблице получатся все числа от 0 до 9999.

Задача 8. (5 баллов)

Положительные числа x, y, z таковы, что $xyz = 20$, $x + y + z = 9$. Докажите, что $xy + yz + xz \geqslant 24$.

Доказательство:

Выразим $xy + yz + xz$ через x. Для этого заметим, что $y + z = 9 - x$, а $yz = \dfrac{20}{x}$, откуда

$$xy + yz + xz - 24 = x(9 - x) + \frac{20}{x} - 24 = \frac{-x^3 + 9x^2 - 24x + 20}{x} = -\frac{(x-2)^2(x-5)}{x}.$$

Это выражение при положительных x принимает отрицательные значения только если $x > 5$. То же самое можно заключить про остальные переменные. При этом все три переменные не могут быть быть больше 5, так как тогда их сумма слишком велика.

Таким образом мы доказали, что если хотя бы одна из переменных лежит в промежутке от 0 до 5, сумма попарных произведений не меньше 24, а обратный случай невозможен. (На самом деле, можно убедиться, что все переменные лежат в промежутке от 0 до 5).

2 вариант

Задача 1. (2 балла)

В классе у каждого либо 5, либо 7 друзей (дружба взаимна), причём у любых двух друзей разное количество друзей в класса. Какое наименьшее количество учеников, большее 0 может быть в классе?

Ответ: 12

Решение:

Посмотрим на какого-то человека. Пусть у него пять друзей. Тогда у всех этих пяти человек по семь друзей. Аналогично есть ещё хотя бы 7 человек с пятью друзьями каждый. Всего 12 человек.

Пример довольно легко построить: две группы из 5 и 7 человек, люди из разных групп дружат между собой, а из одной — нет.

Задача 2. (2 балла)

В положительной непостоянной геометрической прогрессии среднее арифметическое третьего, четвёртого и восьмого членов равно какому-то члену этой прогрессии. Какой минимальный номер у него может быть?

Ответ: 4

Решение:

Третий элемент — либо больший, либо меньший из трёх указанных, значит, он не может быть равен среднему арифетическому всех трёх. Первый и второй элементы тем более не подходят.

Для того, чтобы доказать, что ответ “4” возможен, введём обозначения: пусть $b_n = bq^{n-1}$. Тогда надо решить уравнение $3bq^3 = bq^2 + bq^3 + bq^7$. Упрощая его, получаем $q^5 - 2q + 1 = 0$.

У этого уравнения есть корень $q = 1$, но он нам не подходит, так как прогрессия непостоянна. $q^5-2q+1 = (q-1)(q^4+q^3+q^2+q-1)$. Второй множитель при $q = 0$ отрицателен, а при $q = 1$ положителен, значит, у этого выражения есть корень между нулём и единицей. Таким образом, можно подобрать знаменатель прогрессии и взять любое положительное число в качестве первого члена для ответа 4.

Задача 3. (2 балла)

Может ли число $n^{n^n} - 6n^n + 5$ быть простым при натуральном $n > 2$?

Ответ: Нет.

Решение:

Можно заметить, что указанное число всегда делится на $n-1$. Это легко доказывается через формулу разности степеней или пользуясь тем обстоятельством, что $n \equiv 1 \pmod{n-1}$.

При этом частное тоже больше единицы при $n > 2$.

Задача 4. (2 балла)

Сколько положительных чисел среди чисел вида $\operatorname{ctg}((15^n)^\circ)$, где n — натуральное число от 1 до 2019?

Ответ: 1010

Решение:

$\operatorname{ctg} 15^\circ > 0$.

$15^2 = 225$; $\operatorname{ctg} 225^\circ > 0$.

Далее, $225 \cdot 15 = 3375$, это число даёт остаток 135 при делении на 360. $\operatorname{ctg} 135^\circ < 0$.

$135 \cdot 15 = 2025$, это число даёт остаток 225 при делении на 360. Дальше последовательность остатков при делении на 360 зацикливается, то есть положительные и отрицательные котангенсы будут чередоваться.

Первое число не входит в этот цикл и оно положительно. Среди остальных чисел положительных ровно половина, то есть 1009. Значит, ответ 1010.

Задача 5. (3 балла)

Высота ромба, проведенная из вершины его тупого угла, делит сторону ромба в отношении 1:3, считая от вершины его острого угла. Какую часть площади ромба составляет площадь вписанного в него круга?

Ответ: $\dfrac{\pi\sqrt{15}}{16}$

Решение:

Задача решается с точностью до подобия, поэтому можно считать, что сторона ромба равна 4. Тогда высота делит её на отрезки 1 и 3.

Высоту ромба можно найти по теореме Пифагора: $\sqrt{4^2-1^2}=\sqrt{15}$. Эта же высота является диаметром окружности.

Отсюда получаем отношение площадей: $\dfrac{\left(\frac{\sqrt{15}}{2}\right)^2\pi}{4\sqrt{15}}=\dfrac{\pi\sqrt{15}}{16}$

Задача 6. (3 балла)

Окружность пересекает все стороны остроугольного треугольника ABC, периметр которого 4. a, b, c — отрезки касательных к этой окружности из вершин A, B и C. Докажите, что $a+b+c\leqslant 2$.

Доказательство:

Из того, что треугольник остроугольный и окружность пересекает его в шести точках, следует, что центр окружности лежит внутри треугольника.

Пусть A' — точка касания касательной, выпущенной из точки A, ближайшей к точке B, O — центр окружности. Пусть X — точка пересечения отрезков AB и OA'. Аналогично B' — точка касания касательной, выпущенной из точки B, ближайшей к точке A, а Y — точка пересечения отрезков AB и OB'. При этом, точки A, X, Y, B находятся на отрезке именно в таком порядке, то есть $AX+YB<AB$.

С другой стороны, треугольник $AA'X$ — прямоугольный с гипотенузой AX, поэтому $AX>AA'=a$. Аналогично $BY>BB'=b$. Отсюда получаем $a+b<AX+BY<AB$.

Аналогично получаем $a+c<AC$ и $b+c<BC$. Таким образом, $a+b+c$ меньше полупериметра треугольника, то есть 2, что и требовалась доказать.

(На самом деле, мы доказали более сильное, строгое неравенство, вместо нестрогого, которое требовалось).

Задача 7. (4 балла)

Можно ли расставить в прямоугольной таблице 100×10 числа от 0 до 999 (каждое по одному разу) так, чтобы в каждом квадратике 2×2 сумма чисел была бы одинаковой?

Ответ: Да, можно.

Решение:

Искомая таблица получается как сумма двух таблиц.

Первая таблица выглядит так:

0	99	0	99	0	99	...
0	99	0	99	0	99	...
1	98	1	98	1	98	...
1	98	1	98	1	98	...
2	97	2	97	2	97	...
2	97	2	97	2	97	...
			...			
49	50	49	50	49	50	...

В этой таблице любое число, вместе со своим соседним по горизонтали даёт в сумме 99, так что в любом квадрате 2×2 сумма равна 198.

900	0	800	100	700	200	...
0	900	100	800	200	700	...
900	0	800	100	700	200	...
0	900	100	800	200	700	...
900	0	800	100	700	200	...
0	900	100	800	200	700	...
...						

В этой таблице любое число, вместе со своим соседним по вертикали даёт в сумме 900, так что в любом квадрате 2×2 сумма равна 1800.

При суммировании этих таблиц сумма в каждом квадрате 2×2 будет очевидно составлять 1998.

Осталось понять, что в таблице встретятся все числа.

Рассмотрим расстановку какого-то числа вида $100k$ во второй таблице. Это число расположено в двух соседних столбцах на клетках, которые при шахматной раскраске оказываются одного цвета. При этом в первой таблице в этих двух столбцах встречаются все числа от 0 до 99, причём каждое один раз на чёрной клетке и один раз на белой. Значит, число $100k$ будет просуммировано с каждым числом от 0 до 99 ровно один раз. Таким образом, у нас получатся все числа от $100k$ до $100k + 99$ каждое по разу, а значит, во всей таблице получатся все числа от 0 до 999.

Задача 8. (5 баллов)

Положительные числа x, y, z таковы, что $xyz = 24$, $x + y + z = 10$. Докажите, что $xy + yz + xz \geqslant 28$.

Доказательство:

Выразим $xy + yz + xz$ через x. Для этого заметим, что $y + z = 10 - x$, а $yz = \dfrac{24}{x}$, откуда

$$xy + yz + xz - 28 = x(10 - x) + \frac{24}{x} - 28 = \frac{-x^3 + 10x^2 - 28x + 24}{x} = -\frac{(x-2)^2(x-6)}{x}.$$

Это выражение при положительных x принимает отрицательные значения только если $x > 6$. То же самое можно заключить про остальные переменные. При этом все три переменные не могут быть быть больше 6, так как тогда их сумма слишком велика.

Таким образом мы доказали, что если хотя бы одна из переменных лежит в промежутке от 2 до 6, сумма попарных произведений не меньше 28, а обратный случай невозможен. (На самом деле, можно убедиться, что все переменные лежат в промежутке от 2 до 6).

10 класс

1. (2 балла)

Оценка — *1 балл.*

Пример — *1 балл.*

Только ответ без примера — *0 баллов.*

2. (2 балла)

Оценка — *1 балл.*

Пример (обоснование того, что такой элемент действительно может быть средним арифметическим — *1 балл.*

Только ответ — *0 баллов.*

3. (2 балла)

Только ответ “Нет” — *0 баллов.*

В авторском решении не требовать подробного доказательства делимости на $n-1$.

У этой задачи есть также решения по конкретным модулям.

4. (2 балла)

При доказательстве периодичности уровня строгости, приведённого в авторском решении, достаточно для полного балла.

5. (3 балла)

Только ответ — *0 баллов.*

За несущественный ариметические ошибки снимать *1 балл.*

Решения с ошибками геометрического характера не оцениваются.

6. (3 балла)

Если участник рисует правильную картинку, не требовать строго объяснения того, почему она именно такая.

Решения с неправильной картинкой (или решения без картинки, использующие неправильное расположение точек) не могут привести к доказательству, так как часть неравенств перестаёт быть справедлива. Соответственно, такие решения, скорее всего, помимо ошибок в картинке содержат ещё и ошибки в неравенствах и не должны быть засчитаны даже частично.

7. (4 балла)

Только ответ “Да” без примера или с неверным примером — *0 баллов.*

Полный балл склывается из:

1) Правильный пример — *2 балла* 2) Обоснование того, что в примере выполняется условие для квадратиков 2×2 — *1 балл* 3) Обоснование того, в примере встречаются все числа от 0 до 9999(999 во втором варианте) *1 балл*

Если обоснование какого-либо из условий очевидно следует из примера, жюри вправе не снимать баллы за отсутствие этого обоснования. Например, приведённый в авторском решении пример при отсутствии обоих обоснований следовало бы оценить в $2+1+0=3$ балла, так как выполнение первого условия для этого примера очевидно, а выполнение второго — нет.

Участник не обязан писать явную формулу для каждой клетки таблицы, описания построения таблицы, сходного по строгости с приведённым в авторском решении, достаточно.

Если приведён пример без обоснования и жюри не может за разумное время определить его правильность, жюри вправе поставить за такой пример 0 баллов. Однако, если участник сможет на апелляции объяснить верность своего примера, он должен получить свои 2 балла.

8. (5 баллa)

В ходе решения участник олимпиады может пытаться использовать метод Штурма, неравенства о средних для двух или трёх переменных и другие известные неравенства и приёмы. Известные неравенства разрешается использовать без доказательства.