Открытая олимпиада школьников по математике

11 марта 2018 г.

11 класс

1 вариант

1. (2 балла) В трапеции $ABCD$ с основаниями $AD = 16$ и $BC = 10$ окружности, построенные на сторонах AB, BC и CD как на диаметрах, пересекаются в одной точке. Длина диагонали AC равна 10. Найдите длину BD.

2. (3 балла) В равногранном тетраэдре отметили основания и середины всех четырёх его медиан. Каждое основание медианы тетраэдра соединили с серединами трёх остальных. Докажите, что получившийся многогранник — прямоугольный параллелепипед.

3. (3 балла) Найдите расстояние между кривыми $y = e^{3x+5}$ и $y = (\ln x - 5)/3$.

4. (3 балла) В некоторой стране 450 городов и 6 авиакомпаний. Каждые два города соединены рейсами одной из шести авиакомпаний. Можно ли утверждать, что найдётся авиакомпания и больше 150 городов, между любыми двумя из которых можно добраться рейсами этой авиакомпании (возможно, с пересадками)?

5. (3 балла) Найдите все непрерывные на всей числовой оси функции, удовлетворяющие тождеству $4f(x + y) = f(x)f(y)$ и условию $f(1) = 12$.

6. (3 балла) Пусть x, y, z и t — неотрицательные числа, такие что $x+y+z+t = 5$. Докажите неравенство

$$\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{z^2 + y^2} + \sqrt{z^2 + t^2} + \sqrt{t^2 + 9} \geqslant 10$$

.

7. (4 балла) Решите уравнение:

$$\sin x + \sin 3x + \ldots + \sin 2017x = \cos x + \cos 3x + \ldots + \cos 2017x.$$

8. (4 балла) С числом, записанным на доске, разрешается делать следующую операцию: стирать две соседние цифры, сумма которых не превосходит 9, и записывать эту сумму на их место. Изначально было написано 200-значное число $12341234\ldots1234$. С числом на доске проделывали указанную операцию до тех пор, пока это не стало невозможно. Какое наибольшее число могло оказаться на доске в результате?

Открытая олимпиада школьников по математике

11 марта 2018 г.

11 класс

2 вариант

1. (2 балла) В трапеции $ABCD$ с основаниями $AD = 12$ и $BC = 8$ окружности, построенные на сторонах AB, BC и CD как на диаметрах, пересекаются в одной точке. Длина диагонали AC равна 12. Найдите длину BD.

2. (3 балла) В ортоцентрическом тетраэдре отметили основания и середины всех четырёх его медиан. Каждое основание медианы тетраэдра соединили с серединами трёх остальных. Докажите, что в получившемся многограннике все рёбра имеют равную длину.

3. (3 балла) Найдите расстояние между кривыми $y = e^{3x+7}$ и $y = (\ln x - 7)/3$.

4. (3 балла) В некоторой стране 200 городов и 8 авиакомпаний. Каждые два города соединены рейсами одной из восьми авиакомпаний. Можно ли утверждать, что найдётся авиакомпания и больше 50 городов, между любыми двумя из которых можно добраться рейсами этой авиакомпании (возможно, с пересадками)?

5. (3 балла) Найдите все непрерывные на всей числовой оси функции, удовлетворяющие тождеству $5f(x+y) = f(x)f(y)$ и условию $f(1) = 10$.

6. (3 балла) Пусть x, y, z и t — неотрицательные числа, такие что $x+y+z+t = 4$. Докажите неравенство

$$\sqrt{x^2+t^2} + \sqrt{z^2+1} + \sqrt{z^2+t^2} + \sqrt{y^2+x^2} + \sqrt{y^2+64} \geqslant 13.$$

7. (4 балла) Решите уравнение:

$$\sin x + \sin 3x + \ldots + \sin 2013x = \cos x + \cos 3x + \ldots + \cos 2013x.$$

8. (4 балла) С числом, записанным на доске, разрешается делать следующую операцию: стирать две соседние цифры, сумма которых не превосходит 9, и записывать эту сумму на их место. Изначально было написано 300-значное число $12251225\ldots1225$. С числом на доске проделывали указанную операцию до тех пор, пока это не стало невозможно. Какое наибольшее число могло оказаться на доске в результате?

Открытая олимпиада школьников по математике

11 марта 2018 г.

11 класс

3 вариант

1. (2 балла) В трапеции $ABCD$ с основаниями $AD = 20$ и $BC = 14$ окружности, построенные на сторонах AB, BC и CD как на диаметрах, пересекаются в одной точке. Длина диагонали AC равна 16. Найдите длину BD.

2. (3 балла) В некотором тетраэдре отметили основания и середины всех четырёх его медиан. Каждое основание медианы тетраэдра соединили с серединами трёх остальных. Получившийся многогранник оказался прямоугольным параллелепипедом. Докажите, что исходный тетраэд — равногранный.

3. (3 балла) Найдите расстояние между кривыми $y = e^{5x+7}$ и $y = (\ln x - 7)/5$.

4. (3 балла) В некоторой стране 600 городов и 6 авиакомпаний. Каждые два города соединены рейсами одной из шести авиакомпаний. Можно ли утверждать, что найдётся авиакомпания и больше 200 городов, между любыми двумя из которых можно добраться рейсами этой авиакомпании (возможно, с пересадками)?

5. (3 балла) Найдите все непрерывные на всей числовой оси функции, удовлетворяющие тождеству $3f(x+y) = f(x)f(y)$ и условию $f(1) = 12$.

6. (3 балла) Пусть x, y, z и t — неотрицательные числа, такие что $x+y+z+t = 7$. Докажите неравенство

$$\sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{x^2+1} + \sqrt{z^2+y^2} + \sqrt{t^2+64} + \sqrt{z^2+t^2} \geqslant 17.$$

7. (4 балла) Решите уравнение:

$$\sin x + \sin 3x + \ldots + \sin 2019x = \cos x + \cos 3x + \ldots + \cos 2019x.$$

8. (4 балла) С числом, записанным на доске, разрешается делать следующую операцию: стирать две соседние цифры, сумма которых не превосходит 9, и записывать эту сумму на их место. Изначально было написано 200-значное число $3112331123\ldots31123$. С числом на доске проделывали указанную операцию до тех пор, пока это не стало невозможно. Какое наибольшее число могло оказаться на доске в результате?

Открытая олимпиада школьников по математике

11 марта 2018 г.

11 класс

4 вариант

1. (2 балла) В трапеции $ABCD$ с основаниями $AD = 20$ и $BC = 10$ окружности, построенные на сторонах AB, BC и CD как на диаметрах, пересекаются в одной точке. Длина диагонали AC равна 18. Найдите длину BD.

2. (3 балла) В некотором тетраэдре отметили основания и середины всех четырёх его медиан. Каждое основание медианы тетраэдра соединили с серединами трёх остальных. В получившемся многограннике все 12 ребёр оказались равной длины. Докажите, что исходный тетраэдр ортоцентрический.

3. (3 балла) Найдите расстояние между кривыми $y = e^{3x+11}$ и $y = (\ln x - 11)/3$.

4. (3 балла) В некоторой стране 800 городов и 8 авиакомпаний. Каждые два города соединены рейсами одной из восьми авиакомпаний. Можно ли утверждать, что найдётся авиакомпания и больше 200 городов, между любыми двумя из которых можно добраться рейсами этой авиакомпании (возможно, с пересадками)?

5. (3 балла) Найдите все непрерывные на всей числовой оси функции, удовлетворяющие тождеству $2f(x+y) = f(x)f(y)$ и условию $f(1) = 10$.

6. (3 балла) Пусть x, y, z и t — неотрицательные числа, такие что $x+y+z+t = 2$. Докажите неравенство

$$\sqrt{x^2+z^2} + \sqrt{x^2+1} + \sqrt{z^2+y^2} + \sqrt{y^2+t^2} + \sqrt{t^2+4} \geqslant 5.$$

7. (4 балла) Решите уравнение:

$$\sin x + \sin 3x + \ldots + \sin 2015x = \cos x + \cos 3x + \ldots + \cos 2015x.$$

8. (4 балла) С числом, записанным на доске, разрешается делать следующую операцию: стирать две соседние цифры, сумма которых не превосходит 9, и записывать эту сумму на их место. Изначально было написано 100-значное число $21162116\ldots2116$. С числом на доске проделывали указанную операцию до тех пор, пока это не стало невозможно. Какое наибольшее число могло оказаться на доске в результате?