11 класс. I отборочный тур.

Задача 1. (2 балла).

1. Многочлен четвёртой степени равен квадрату своей второй производной. Известно, что коэффициент при x^3 в этом многочлене равен 2. Найдите коэффициент при x^2.

2. Многочлен четвёртой степени равен квадрату своей второй производной. Известно, что коэффициент при x^3 в этом многочлене равен 3. Найдите коэффициент при x^2.

3. Многочлен четвёртой степени равен квадрату своей второй производной. Известно, что коэффициент при x^3 в этом многочлене равен 5. Найдите коэффициент при x^2.

Примеры записи ответов:
45

Задача 2. (2 балла).

1. На пол поставили кубик со стороной 1, рядом с ним кубик со стороной 2, рядом с ним кубик со стороной 3 и т.д. Оказалось, что объем получившейся лестницы равен 672400. Какое количество кубиков было поставлено?

2. На пол поставили кубик со стороной 1, рядом с ним кубик со стороной 2, рядом с ним кубик со стороной 3 и т.д. Оказалось, что объем получившейся лестницы равен 216225. Какое количество кубиков было поставлено?

3. На пол поставили кубик со стороной 1, рядом с ним кубик со стороной 2, рядом с ним кубик со стороной 3 и т.д. Оказалось, что объем получившейся лестницы равен 396900. Какое количество кубиков было поставлено?

Примеры записи ответов:
45

Задача 3. (2 балла)

1. ABCD — трапеция с основаниями AD = 14 и BC = 10. Оказалось, что середины всех четырёх сторон трапеции лежат на одной окружности. Найдите её радиус.
Если правильных ответов несколько, перечислите их в любом порядке через точку с запятой.

2. ABCD — трапеция с основаниями AD = 20 и BC = 12. Оказалось, что середины всех четырёх сторон трапеции лежат на одной окружности. Найдите её радиус.
Если правильных ответов несколько, перечислите их в любом порядке через точку с запятой.

3. ABCD — трапеция с основаниями AD = 6 и BC = 10. Оказалось, что середины всех четырёх сторон трапеции лежат на одной окружности. Найдите её радиус.
Если правильных ответов несколько, перечислите их в любом порядке через точку с запятой.

Примеры записи ответов:
45
4; 5

Задача 4. (3 балла).

1. Дан равногранный тетраэдр, длины рёбер которого — целые числа. Два из этих рёбер имеют длины 7 и 10. Какое наибольшее значение может принимать периметр тетраэдра?

2. Дан равногранный тетраэдр, длины рёбер которого — целые числа. Два из этих рёбер имеют длины 5 и 8. Какое наибольшее значение может принимать периметр тетраэдра?

3. Дан равногранный тетраэдр, длины рёбер которого — целые числа. Два из этих рёбер имеют длины 9 и 11. Какое наибольшее значение может принимать периметр тетраэдра?

Примеры записи ответов:
45

Задача 5. (3 балла).

1. Функция $f(x)$ определена для $x > 0$ и такова, что $f(x) + f(y) = f(xy)\,(x+y)$. Известно, что $f(3) = 15$. Найдите $f(5)$.

2. Функция $f(x)$ определена для $x > 0$ такова, что $f(x) + f(y) = f(xy)\,(x+y)$. Известно, что $f(3) = 16$. Найдите $f(4)$.

3. Функция $f(x)$ определена для $x > 0$ такова, что $f(x) - f(y) = f(xy)\,(y-x)$. Известно, что $f(2) = 10$. Найдите $f(5)$.

Примеры записи ответов:
45

Задача 6. (3 балла)

1. Найдите все положительные решения системы уравнений.

$$\begin{cases} x_1+x_2=5x_3^2 \\ x_2+x_3=5x_4^2 \\ \dots \\ x_{2015}+x_{2016}=5x_{2017}^2 \\ x_{2016}+x_{2017}=5x_1^2 \\ x_{2017}+x_1=5x_2^2 \end{cases}$$

В ответе укажите значение x_1. Если правильных ответов несколько, перечислите их в любом порядке через точку с запятой.

2. Найдите все положительные решения системы уравнений.

$$\begin{cases} x_1+x_2=0{,}5x_3^2 \\ x_2+x_3=0{,}5x_4^2 \\ \dots \\ x_{2015}+x_{2016}=0{,}5x_{2017}^2 \\ x_{2016}+x_{2017}=0{,}5x_1^2 \\ x_{2017}+x_1=0{,}5x_2^2 \end{cases}$$

В ответе укажите значение x_1. Если правильных ответов несколько, перечислите их в любом порядке через точку с запятой.

3. Найдите все положительные решения системы уравнений.

$$\begin{cases} x_1+x_2=4x_3^2 \\ x_2+x_3=4x_4^2 \\ \dots \\ x_{2015}+x_{2016}=4x_{2017}^2 \\ x_{2016}+x_{2017}=4x_1^2 \\ x_{2017}+x_1=4x_2^2 \end{cases}$$

В ответе укажите значение x_1. Если правильных ответов несколько, перечислите их в любом порядке через точку с запятой.

Примеры записи ответов:
45
4,5
4/5

Задача 7. (3 балла)

1. Дан кубический многочлен $p(x)$. Известно, что $p(4)=5$, $p(0)=25$, $p(-2) = -13$, $p(6)=43$. Кроме того, известно, что $p(x) > 0$ при $x > -1$. Найдите площадь фигуры, ограниченно прямыми $x = -1$, $y = 0$, $x = 5$ и графиком данного многочлена.

2. Дан кубический многочлен $p(x)$. Известно, что $p(0)=46$, $p(2)=40$, $p(4)=10$, $p(6)=4$. Кроме того, известно, что $p(x) > 0$ при $x > 0$. Найдите площадь фигуры, ограниченно прямыми $x = 0$, $y = 0$, $x = 6$ и графиком данного многочлена.

3. Дан кубический многочлен $p(x)$. Известно, что $p(-6)=30$, $p(-3)=45$, $p(-1)=15$, $p(2)=30$. Найдите площадь фигуры, ограниченно прямыми $x = -6$, $y = 0$, $x = 2$ и графиком данного многочлена, если также известно, что на промежутке от -6 до 2 данный многочлен принимает только положительные значения.

<u>Примеры записи ответов:</u>
45

Задача 8. (3 балла)

1. Решите неравенство: $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}+\frac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{x-99}+\sqrt{x-100}}>2$.
Ответ запишите в виде промежутка. Например, промежуток (-1; 2] означает, что $1<x\leq 2$.
Если граница промежутка «бесконечность», используйте букву Б.

2. Решите неравенство: $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}+\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{x+119}+\sqrt{x+120}}>4$.
Ответ запишите в виде промежутка. Например, промежуток (-1; 2] означает, что $1<x\leq 2$.
Если граница промежутка «бесконечность», используйте букву Б.

3. Решите неравенство: $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}+\frac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{x-119}+\sqrt{x-120}}>2$.
Ответ запишите в виде промежутка. Например, промежуток (-1; 2] означает, что $1<x\leq 2$.
Если граница промежутка «бесконечность», используйте букву Б.

<u>Примеры записи ответов:</u>
[-4; 5)
(-4; 5]
(-4; 5)
[-4; 5]

(-Б; Б)

Задача 9. (3 балла)

1. В треугольнике ABC угол C в два раза больше угла B. CC_1 — биссектриса угла C, D — точка пересечения описанной окружности треугольника ACC_1 и стороны BC. BD = 8, CD = 2. Найдите длину AB.
Если правильных ответов несколько, перечислите их в любом порядке через точку с запятой.

2. В треугольнике ABC угол C в два раза больше угла B. CC_1 — биссектриса угла C, D — точка пересечения описанной окружности треугольника ACC_1 и стороны BC. BD = 25, CD = 14. Найдите длину AB.
Если правильных ответов несколько, перечислите их в любом порядке через точку с запятой.

3. В треугольнике ABC угол C в два раза меньше угла B. BB_1 — биссектриса угла B, D — точка пересечения описанной окружности треугольника ABB_1 и стороны AB. BD = 14, CD = 18. Найдите длину AC.
Если правильных ответов несколько, перечислите их в любом порядке через точку с запятой.

Примеры записи ответов:
45

Задача 10. (5 баллов)

1. Сколько существует способов разрезать горизонтальный прямоугольник 2x11 на прямоугольники 1x2 (горизонтальные и вертикальные) и 1x3 (горизонтальные, так как вертикальные не помещаются)?

2. Сколько существует способов разрезать горизонтальный прямоугольник 2x11 на прямоугольники 1x2 (горизонтальные и вертикальные) и 1x4 (горизонтальные, так как вертикальные не помещаются)?

3. Сколько существует способов разрезать прямоугольник 2x8 на прямоугольники 1x2 (горизонтальные и вертикальные) и квадратики 1x1?

Примеры записи ответов:
4545