

10 класс. I отборочный тур.

Задача 1 (2 балла).

1. На листке бумаги нарисовали квадрат со стороной 1, рядом с ним нарисовали квадрат со стороной 2, рядом с ними нарисовали квадрат со стороной 3 и т.д. Оказалось, что площадь всей получившейся фигуры равна 338350. Какое количество квадратов было нарисовано?

2. На листке бумаги нарисовали квадрат со стороной 1, рядом с ним нарисовали квадрат со стороной 2, рядом с ними нарисовали квадрат со стороной 3 и т.д. Оказалось, что площадь всей получившейся фигуры равна 1136275. Какое количество квадратов было нарисовано?

3. На листке бумаги нарисовали квадрат со стороной 1, рядом с ним нарисовали квадрат со стороной 2, рядом с ними нарисовали квадрат со стороной 3 и т.д. Оказалось, что площадь всей получившейся фигуры равна 42925. Какое количество квадратов было нарисовано?

Примеры записи ответов:

45

Задача 2. (2 балла).

1. В стране Самолёттии 20 городов, некоторые города соединены двусторонними авиарейсами. При этом, между любыми двумя городами существует только один разумный авиамаршрут (т. е. маршрут, на котором не надо пользоваться одним и тем же авиарейсом в разных направлениях).

Для каждого из городов вычислили авиарасстояние до столицы. Оно рассчитывается как минимальное количество рейсов, необходимое, чтобы долететь из этого города до столицы. Для каждых двух городов А и В, соединённых авиарейсом, стоимость билета из города А в город В (также как и обратного) в тугриках равна наибольшему из авиарасстояний от А и В до столицы. В частности, билет до столицы из любого соединённого с ней прямым рейсом города стоит 1 тугрик; все остальные рейсы, вылетающие из этих городов, стоят 2 тугрика и так далее.

Вася много путешествовал по Самолёттии (не только на самолётах) и в конце года оказалось, что он ровно по разу воспользовался каждым из авиарейсов (то есть, для каждых двух городов А и В, соединённых прямым авиарейсом, он слетал либо из А в В, либо из В в А, причём только в одну их сторон). Какое наибольшее количество тугриков он мог потратить на авиаперелёты?

2. В стране Аэродромии 30 городов, некоторые города соединены двусторонними авиарейсами. При этом, между любыми двумя городами существует только один разумный авиамаршрут (т. е. маршрут, на котором не надо пользоваться одним и тем же авиарейсом в разных направлениях).

Для каждого из городов вычислили авиарасстояние до столицы. Оно рассчитывается как минимальное количество рейсов, необходимое, чтобы долететь из этого города до столицы. Для каждых двух городов А и В, соединённых авиарейсом, стоимость билета из города А в город В (также как и обратного) в фартингах равна наибольшему из авиарасстояний от А и В до столицы. В частности, билет до столицы из любого соединённого с ней прямым рейсом города стоит 1 фартинг; все остальные рейсы, вылетающие из этих городов, стоят 2 фартинга и так далее.

Коля много путешествовал по Аэродромии (не только на самолётах) и в конце года оказалось, что он ровно по разу воспользовался каждым из авиарейсов (то есть, для каждых двух городов А и В, соединённых прямым авиарейсом, он слетал либо из А в В, либо из В в А, причём только в одну их сторон). Какое наибольшее количество фартингов он мог потратить на авиаперелёты?

3. В стране Авиании 40 городов, некоторые города соединены двусторонними авиарейсами. При этом, между любыми двумя городами существует только один разумный авиамаршрут (т. е. маршрут, на котором не надо пользоваться одним и тем же авиарейсом в разных направлениях).

Для каждого из городов вычислили авиарасстояние до столицы. Оно рассчитывается как минимальное количество рейсов, необходимое, чтобы долететь из этого города до столицы. Для каждых двух городов А и В, соединённых авиарейсом, стоимость билета из города А в город В (также как и обратного) в марках равна наибольшему из авиарасстояний от А и В до столицы. В частности, билет до столицы из любого соединённого с ней прямым рейсом города стоит 1 марку; все остальные рейсы, вылетающие из этих городов, стоят 2 марки и так далее.

Петя много путешествовал по Авиании (не только на самолётах) и в конце года оказалось, что он ровно по разу воспользовался каждым из авиарейсов (то есть, для каждых двух городов А и В, соединённых прямым авиарейсом, он слетал либо из А в В, либо из В в А, причём только в одну их сторон). Какое наибольшее количество марок он мог потратить на авиаперелёты?

Примеры записи ответов:

45

Задача 3 (3 балла).

1. При каких натуральных x и y значение выражения $4x + \frac{169}{x} + 9y + \frac{625}{y}$ наименьшее?
В ответе укажите x и y в правильном порядке через точку с запятой.

2. При каких натуральных x и y значение выражения $4x + \frac{289}{x} + 16y + \frac{529}{y}$ наименьшее?
В ответе укажите x и y в правильном порядке через точку с запятой.

3. При каких натуральных x и y значение выражения $25x + \frac{484}{x} + 4y + \frac{225}{y}$ наименьшее?
В ответе укажите x и y в правильном порядке через точку с запятой.

Примеры записи ответов:

(1; 2)
1; 2

Задача 4 (3 балла).

1. Известно, что квадратное уравнение $Ax^2 + Bx + V = 0$, где A , B и V — какие-то цифры, имеет корень $-3/2$. На какое число большее 1 точно делится трёхзначное число АБВ (то есть число, состоящее из цифр A , B и V в таком порядке)?

2. Известно, что квадратное уравнение $Ax^2 + Bx + V = 0$, где A , B и V — какие-то цифры, имеет корень -3 . На какое число большее 1 точно делится трёхзначное число АБВ (то есть число, состоящее из цифр A , B и V в таком порядке)?

3. Известно, что квадратное уравнение $Ax^2 + Bx + V = 0$, где A , B и V — какие-то цифры, имеет корень -7 . На какое число большее 1 точно делится трёхзначное число АБВ (то есть число, состоящее из цифр A , B и V в таком порядке)?

Примеры записи ответов:

45

Задача 5 (3 балла).

1. Известно, что натуральное число n делится на 3 и на 4. Найдите все такие возможные n , если известно, что количество всех его делителей (включая 1 и n) равно 15 ? Если возможных значений несколько, перечислите их в любом порядке через точку с запятой.

2. Известно, что натуральное число n делится на 3 и на 4. Найдите все такие возможные n , если известно, что количество всех его делителей (включая 1 и n) равно 21 ? Если возможных значений несколько, перечислите их в любом порядке через точку с запятой.

3. Известно, что натуральное число n делится на 3 и на 4. Найдите все такие возможные n , если известно, что количество всех его делителей (включая 1 и n) равно 22 ? Если возможных значений несколько, перечислите их в любом порядке через точку с запятой.

Примеры записи ответов:

45

45; 456

Задача 6 (3 балла).

1. ABCD — равнобедренная трапеция, $AB = CD = 49$, $BC = 84$, $AD = 140$. BCDE также равнобедренная трапеция. Найдите AE. (Точки A и E не совпадают)

Если возможных значений несколько, перечислите их в любом порядке через точку с запятой.

2. ABCD — равнобедренная трапеция, $AB = CD = 121$, $BC = 176$, $AD = 220$. BCDE также равнобедренная трапеция. Найдите AE. (Точки A и E не совпадают)

Если возможных значений несколько, перечислите их в любом порядке через точку с запятой.

3. ABCD — равнобедренная трапеция, $AB = CD = 25$, $BC = 40$, $AD = 60$. BCDE также равнобедренная трапеция. Найдите AE. (Точки A и E не совпадают)

Если возможных значений несколько, перечислите их в любом порядке через точку с запятой.

Примеры записи ответов:

45

45; 56

Задача 7 (3 балла).

1. Дана арифметическая прогрессия a_n с разностью 2 и первым членом $a_1 = 9$. При каком n

выполнено следующее равенство:
$$\frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_{n-1}} + \sqrt{a_n}} = 21$$
 ?

2. Дана арифметическая прогрессия a_n с разностью 2 и первым членом $a_1 = 4$. При каком n

выполнено следующее равенство:
$$\frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_{n-1}} + \sqrt{a_n}} = 22$$
 ?

3. Дана арифметическая прогрессия a_n с разностью 2 и первым членом $a_1 = 1$. При каком n

выполнено следующее равенство:
$$\frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_{n-1}} + \sqrt{a_n}} = 23$$
 ?

Примеры записи ответов:

45

Задача 8 (3 балла).

1. Пусть $f(x) = \frac{2 \cdot 9^x}{9^x + 3}$. Найдите сумму $f(0) + f\left(\frac{1}{2017}\right) + \dots + f\left(\frac{2016}{2017}\right) + f(1)$.

2. Пусть $f(x) = \frac{16^x}{16^x + 4}$. Найдите сумму $f(0) + f\left(\frac{1}{2017}\right) + \dots + f\left(\frac{2016}{2017}\right) + f(1)$.

3. Пусть $f(x) = \frac{3 \cdot 4^x}{4^x + 2}$. Найдите сумму $f(0) + f\left(\frac{1}{2017}\right) + \dots + f\left(\frac{2016}{2017}\right) + f(1)$.

Примеры записи ответов:

45

Задача 9 (4 балла).

1. Из точки А проведены две касательные к окружности. Расстояние от точки А до точки касания равно 13, а расстояние между точками касания равно 24. Найдите наибольшее возможное расстояние от точки А до точки на окружности.

2. Из точки А проведены две касательные к окружности. Расстояние от точки А до точки касания равно 10, а расстояние между точками касания равно 12. Найдите наибольшее возможное расстояние от точки А до точки на окружности.

3. Из точки А проведены две касательные к окружности. Расстояние от точки А до точки касания равно 10, а расстояние между точками касания равно 16. Найдите наибольшее возможное расстояние от точки А до точки на окружности.

Примеры записи ответов:

Задача 10 (5 баллов).

1. График дробно-линейной функции $\frac{3x-3}{x-2}$ повернули вокруг некоторой точки на какой-то угол, в результате чего получился график дробно-линейной функции $\frac{-x+a}{2x-4}$. Чему может быть равно a ? Если возможных значений несколько, перечислите их в любом порядке через точку с запятой.

2. График дробно-линейной функции $\frac{5x-7}{x-2}$ повернули вокруг некоторой точки на какой-то угол, в результате чего получился график дробно-линейной функции $\frac{-12x+a}{3x+1}$. Чему может быть равно a ? Если возможных значений несколько, перечислите их в любом порядке через точку с запятой.

3. График дробно-линейной функции $\frac{3x-11}{x-3}$ повернули вокруг некоторой точки на какой-то угол, в результате чего получился график дробно-линейной функции $\frac{12x-a}{4x-1}$. Чему может быть равно a ? Если возможных значений несколько, перечислите их в любом порядке через точку с запятой.

Примеры записи ответов:

-1

-1; 2